

# 几何

## 完整课程大纲

*Illustrative Mathematics*® 9-12 AGA (v.360)

8 单元 • 单元目标 • 部分目标 • 逐课大纲

来源: <https://accessim.org/9-12-aga/geometry?a=teacher>

已授权 CC BY-NC 4.0 • © Illustrative Mathematics

## 课程概览

Illustrative Mathematics 9-12 AGA 课程的几何被组织为 8 单元。学生从构造和刚性变换开始，然后证明三角形和四边形全等。他们研究相似性，包括相似的直角三角形和勾股定理，然后构建直角三角形三角学。他们对实体（横截面、比例和体积）进行推理，然后转向坐标几何，用代数方法证明定理并使用圆和抛物线的方程。他们研究圆的几何形状（弦、弧、内切角、切线、扇形和弧度），并以条件概率结束这一年。

单元顺序为：

- 单元 1：构造和刚性变换
- 单元 2：全等
- 单元 3：相似度
- 单元 4：直角三角形
- 单元 5：立体几何
- 单元 6：坐标几何
- 单元 7：圆
- 单元 8：条件概率

每个单元都分为字母部分（A、B、C、D、E（如适用）），每个部分都是一系列日常课程。可选课程已注明。

# 单元 1：构造和刚性变换

## 单元学习目标

学生进行圆规和直尺的构造，在不参考坐标网格的情况下定义刚性运动（反射、平移、旋转），描述对称性，并使用变换来证明有关直线、角度和平行线的定理。

## 单元说明

本单元从构造开始，继续进行严格的转换，最后介绍校对写作。在8年级，学生主要借助坐标网格，通过实验确定了刚性变换的保角和保长特性。学生之前还研究了他们将在本单元中证明的角度属性。

构造在几何的逻辑基础中发挥着重要作用。本单元的重点是让学生在给定测量帮助的情况下探索平面形状的属性。到目前为止，学生们已经对数字、方程、变量、坐标网格和其他可量化结构进行了如此多的研究，以至于他们在不测量距离或角度的情况下能够将几何概念推向多远，这可能会令人惊讶。

在本单元开始时，学生有机会从对直线和弧线的非正式探索转向根据自己的构造产生猜想并撰写论证。圆的定义是本单元和整个课程概念的重要基础。

接下来，学生回忆以前年级的转换，并学习使用构建工具而不是网格来创建刚性运动。这导致了旋转、反射和平移的严格定义，而不参考坐标网格。

最后，学生开始使用他们学到的定义来证明定理。他们开始更正式地表达他们的推理，从模糊的陈述（“看起来像……”）转向数学家使用的更正式的逐点变换证明。

从第二部分开始，为学生提供空白参考图表，为教师提供完整的参考图表。参考图表是学生在进行正式论证时参考的资源。学生将在整个课程中不断添加内容。请参阅课程指南了解更多信息。

## A 部分：结构

### 本节学习目标

- 根据说明创建结构。
- 准确描述施工步骤。
- 使用结构中的圆圈来推断图形中的长度。

### 本节说明

在本节中，学生使用刚性圆规和直尺来开发可用于构建各种图形的构建技术目录。学生首先遵循指示并对图形进行观察。然后，他们写下自己的说明，并找出在沟通中保持精确性的方法。多个课程包括垂直线。这个关键的构建块允许学生在本节中构建平行线和正方形。垂直平分线用于本单元后面术语“反射”的定义以及侧边证明中

边边三角形全等定理在后续单元中。每种构造技术都支持学生完善几何对象的定义以及解释其思维的能力。在最后的课程中，学生根据垂直平分线的经验来回答有关在现实世界中分配资源的问题。

课时

1. 构建它——让我们使用工具来精确地创建形状。
2. 构造图案——让我们使用圆规和直尺构造来制作图案。
3. 构造技术 1：垂直平分线 - 让我们探索相等的距离。
4. 构造技术 2：等边三角形 - 让我们确定在正六边形的构造中可能有哪些形状。
5. 施工技术 3：垂直线和角平分线 - 让我们使用工具来解决一些施工挑战。
6. 施工技巧4：平行线和垂直线——让我们使用工具来精确地绘制平行线和垂直线。
7. 构造技术 5：正方形 — 让我们使用直尺和圆规移动来构造正方形。
8. 使用技术进行构建（可选）——让我们使用技术来构建图表。
9. 快速交付——让我们使用垂直平分线。

## B 节：定义刚性变换

本节学习目标

- 理解刚性变换通过保持距离和角度来产生全等的图形。
- 画出给定图形的变换结果。

本节说明

在本节中，学生将学习网格内和网格外的变换。提供网格结构可以让学生将他们在之前课程中的学习联系起来。然后，学生学习网格外的刚性运动、平移、反射和旋转的精确定义。学生们记得，如果存在将一个图形变为另一个图形的严格变换，则这些图形被称为全等。他们研究了刚性运动在各种情况下保持距离和角度的想法。在随后的章节和单元中，学生使用此处生成的精确定义来证明定理。本节有意为学生提供额外的时间来学习新的惯例并制定今年的规范。

课时

1. 刚性变换——让我们画一些变换。
2. 定义反射——让我们反射一些图形。
3. 定义平移——让我们平移一些数字。
4. 结合旋转——让我们画一些变换。
5. 定义旋转——让我们精确旋转形状。

## C 部分：使用刚性变换

### 本节学习目标

- 使用将图形自身转化为变换来描述图形的对称性。
- 解释将给定图形转换为另一个图形的一系列变换。

### 本节说明

在本节中，学生将研究具有某些形状的刚性变换，也称为对称性。然后学生继续描述一系列严格的变换，将一个图形转变为另一个全等的图形。为了让学生为未来的全等证明做好准备，学生们开始提出一个系统的、逐点的变换序列，该序列将用于将任意一对全等多边形相互结合。如果学生需要额外练习此策略，则可以选择一门课程。逐点视角还说明了从将变换视为网格上的“移动”到将变换视为将点作为输入并产生点作为输出的函数的转变。变换作为函数的概念在后面探索坐标几何的单元中得到了进一步发展。本节有意为学生提供额外的时间来学习新的惯例并制定今年的规范。

### 课时

1. 对称性——让我们描述一些形状的对称性。
2. 更多对称性——让我们描述更多形状的对称性。
3. 使用刚性变换——让我们比较一下变换后的图形。
4. 练习逐点变换（可选）——让我们弄清楚一些变换。

## D部分：证据和证明

### 本节学习目标

- 标记图表以便写出精确的猜想。
- 证明有关直线和角度的定理。

### 本节说明

在本节中，学生提出关于角度关系的猜想，并使用他们所知道的刚性变换来证明它们。主要工作是校对写作技巧。为了集中论证，许多证明都是针对学生在以前年级首次引入的想法，例如补充角、互补角、垂直角和相邻角。学生还使用上一节中的严格定义和一些断言来证明三角形角和定理。学生们正在学习如何更正式地表达他们的推理。期望学生能够以不同程度的形式进行解释。预计本节结束时不会掌握校对写作。更合理的目标是让学生全等地标记和标记数字以表明全等性，这有助于他们更准确地进行交流。这些材料中的证明都是以叙述的形式写成的。叙述格式与学生可能必须用来说服他们的伙伴的讨论相匹配，也与数学家编写证明的方式相匹配。

### 课时

1. 证据、角度和证明——让我们做出令人信服的解释。
2. 变换、横截面和证明——让我们证明关于平行线的陈述。
3. 一百八十——让我们证明三角角和定理。

## E 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 现在您可以构建什么？（可选）——让我们构建一些创意形状。

## 单位 2：全等

### 单元学习目标

学生通过推理刚性变换来证明数字是全等的。他们证明了三角形全等定理（SSS、SAS、ASA）、垂直平分线定理以及有关四边形的几个定理。

### 单元说明

在本单元中，学生证明各种数字是全等的。它们从线段（2 顶点）开始，然后是三角形（3 顶点），最后是四边形（4 顶点）。在开始本单元之前，学生熟悉前一单元的严格转换和全等性。本单元中的三角形全等定理为后续单元中的三角形相似性奠定了基础。

第一部分侧重于建立全等性。学生们在中学时记得，如果两个图形全等，那么图形的每一对对应部分也全等。接下来，学生使用刚性变换来证明欧几里得几何的三角形全等定理：

边-边-边三角形全等，边-角-边三角形全等，以及角-边-角三角形全等。学生们证明，对于每组标准，都存在一系列刚性运动，这些运动会将一个三角形移到另一个三角形上。

在上一个单元中，学生们开始证明他们的回答是合理的。在本单元中，学生写出更严格的证明。起初，学生可能会使用不精确的语言来表达他们的想法。在整个单元中，他们将阅读示例，练习向合作伙伴解释想法，并建立精确陈述的参考以在未来的证明中使用。写证明不仅意味着为别人的主张提供理由，构建可行的论点还包括写出猜想并详细说明给定的信息。

学生使用变换编写全等证明，以便得到的定理可以在未来的工作中使用，而无需重复论证。学生探索的许多应用都涉及四边形。学生稍后将在坐标几何中使用他们证明的有关四边形的定理，因为他们使用代数方法来证明有关四边形的其他结果。

## A 部分：全等数字

### 本节学习目标

- 理解并生成建立相应部分的全等陈述。
- 通过推理严格的变换来证明数字是否全等。

### 本节说明

在本节中，学生证明如果三角形全等，则所有相应部分也必须全等，并且他们开始开发用于证明三角形全等定理的语言。随着学生在证明研究中取得进展，他们有机会创建自己的证明，并看到越来越正式的语言模型来表达他们的推理。创建一系列供学生借鉴的陈述和理由有助于减少用正式语言编写证明的认知需求，以便学生可以专注于每个新证明的逻辑连贯性。在本节和后续各节中，学生将开发用于证明的陈述，例如“由于顶点沿同一条射线的距离相同，因此它们必须位于相同的位置。我知道这些点距端点的距离相同，因为刚性变换保留了距离。”在加法中，为证明的每个部分开发语言，学生还开发定理来帮助巩固证明。在本节中，学生证明任何一对具有相同长度的线段都必须是

全等。这使得学生可以跳过描述变换的顺序，以便在未来关于全等图形的证明中将一对边对齐。

课时

1. 全等部分，1 部分 — 让我们弄清楚图中相应的边和角度与全等有何关系。
2. 全等部分，部分 2 — 让我们以有助于我们看到相应部分的方式命名图形。
3. 全等三角形，1 部分 — 让我们使用刚性变换来确保两个三角形全等。
4. 全等三角形，2 部分 — 让我们使用刚性变换来确定三角形是否全等。
5. 点、线段和锯齿形——让我们弄清楚线段何时全等。

## B 节：三角形全等定理

本节学习目标

- 确定边-边-边、角-边-角和边-角-边三角形全等定理适用的情况。
- 使用先前证明的有关三角形的定理来编写新的证明。

本节说明

在本节中，学生证明三个三角形全等定理，并应用这些定理来证明其他猜想。学生从本节开始，学习证明边-角-边和角-边-角三角形全等定理的技能。然后，他们停下来证明垂直平分线定理，以便将其用于证明边-边-边三角形全等定理。对于三角形全等的不明确情况，有一个可选课程，即边-边-角。完成本选修课程可以帮助学生更好地理解在哪些情况下知道两条边且不知道它们之间的角度定义了一个独特的三角形。本课程帮助学生了解当他们在未来的课程中学习三角学时，正弦定理和余弦定理何时可能会产生不明确的结果。应用三角形全等定理通常涉及有目的地绘制辅助线以形成具有某些属性的三角形。学生在整个部分中练习这项技能。

课时

1. 边-角-边三角形全等——让我们使用定义和定理来找出形状的正确性，而不必测量形状的所有部分。
2. 角-边-角三角形全等——让我们看看是否可以证明保证三角形全等的其他测量组，并应用这些定理。
3. 垂直平分线定理——让我们说服自己，我们对垂直平分线的猜想一定是正确的。
4. 边-边-边三角形全等——让我们弄清楚边-边-边是否有足够的信息来保证三角形全等。
5. 练习证明——让我们练习一下我们所学到的关于证明和全等的知识。
6. 边-边-角（有时）全等（可选）——让我们探讨一下不明确的三角形全等标准。

## C节：关于四边形的证明

本节学习目标

- 批评其他人对四边形和构造的论证。
- 使用先前证明的定理编写有关四边形的证明。

本节说明

在本节中，学生应用三角形全等定理来编写更多证明。他们考虑四边形、角平分线和等腰三角形的对角线。学生有机会参与证明过程的各个方面：产生猜想、详细说明要证明的具体陈述、撰写证明以及批评证明。他们继续创建辅助线并遇到重叠三角形的挑战。

课时

1. 关于四边形的证明——让我们证明关于四边形及其对角线的定理。
2. 关于平行四边形的证明——让我们证明关于平行四边形的定理。
3. 将其一分为二——让我们证明我们猜想的一些结构确实有效。

## D 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 四边形的全等——让我们研究一下四边形的全等与三角形的全等有何相似之处和不同之处。

## 单位 3：相似度

### 单元学习目标

学生扩展刚性变换以包括 位似变换 并定义相似图形。他们证明了角-角三角形相似定理，用相似直角三角形证明了勾股定理及其逆三角形，并利用相似性解决了问题。

### 单元说明

在本单元中，学生将相似的图形作为一对图形进行探索，通过一系列严格的变换和 位似变换 将一个图形替换为另一个图形。本单元的工作扩展了学生对先前在 8 年级遇到的相似性的理解，以及他们在早期单元中关于全等性的工作。

本单元首先探索 位似变换 属性，包括通过 位似变换 保留角度的想法，并且根据 位似变换 的中心将线取为自身或平行线。然后，学生练习使用 位似变换 和严格变换来显示一对图形相似，并寻找其他方法来知道一对图形相似。然后，该单元更密切地关注相似三角形，介绍角-角相似定理等定理以及与 勾股定理 的联系。

学生在整个单元中专注于写出猜想并证明它们。学生应该更加熟悉注意到模式、做出猜想、然后寻找反例或用证明来证明猜想的过程。

## A部分：位似变换的性质

### 本节学习目标

- 理解 位似变换 取角度为全等角，不通过 位似变换 中心的线为平行线。
- 创建和解释按比例绘制的人物图。

### 本节说明

在本节中，学生将回顾 位似变换 的概念，并扩展他们的理解，以注意诸如 位似变换 之后保持全等的角度以及 位似变换 之后将线取为相同或平行线之类的属性。学生练习在 位似变换 之前和之后编写等效的段长度比，以查找相同 位似变换 之后的未知长度。然后，他们检查相似三角形的特殊情况，其中 位似变换 的中心是三角形的顶点。

### 课时

1. 比例图——让我们制作比例图。
2. 太阳系的规模（可选）——我们用 按比例缩放 来计算。
3. 测量 位似变换 — 让我们来测量 按比例缩放 多边形。
4. 扩大直线和角度 — 让我们 按比例缩放 直线和角度。
5. 使用 位似变换 分割三角形边（1 部分）- 让我们绘制连接三角形边中点的线段。

## B部分：相似性变换和比例推理

### 本节学习目标

- 生成相似图形的相似性陈述，并识别边长之间的等效比例关系。
- 使用角-角三角形相似定理和三角形角和定理来证明两个三角形相似。

#### 本节说明

在本节中，学生使用相似图形的定义来开发保证相似性的其他条件，特别是在三角形中。学生通过从几个例子中进行概括，继续发展他们提出和证明猜想的技能。学生发展角-角三角形相似定理，并且可选课程允许学生探索三角形相似定理的其他可能条件。

#### 课时

1. 连接相似性和变换——让我们识别相似的图形。
2. 通过变换推理相似性——让我们来描述相似的三角形。
3. 它们都相似吗？— 让我们证明一下数字是相似的。
4. 三角形相似的条件——让我们证明一些三角形是相似的。
5. 三角形相似性的其他条件（可选）——让我们证明更多的三角形是相似的。
6. 使用 位似变换 分割三角形边（2 部分）- 让我们研究三角形中的平行线段。
7. 比例关系练习（可选）——让我们找出比例关系中的未知值。

## 第 C 节：直角三角形的相似性

#### 本节学习目标

- 使用相似性、比例性和 勾股定理 来解决涉及直角三角形的问题。

#### 本节说明

在本节中，学生将探索相似直角三角形，从而可以使用 加法 中的 勾股定理 来实现相似三角形的属性。他们还利用相似三角形的性质来证明 勾股定理，然后练习使用比例关系和 勾股定理 一起找到未知长度。

#### 课时

1. 使用 勾股定理 和相似性 — 让我们探索高度绘制到斜边的直角三角形。
2. 证明 勾股定理 — 让我们证明 勾股定理。
3. 勾股定理 的反面 — 让我们看看 勾股定理 的反面。
4. 找出三角形中的所有未知值——让我们找出直角三角形中的所有未知值。

## D 部分：让我们付诸实践

#### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 反射相似性——让我们使用相似性来解决问题。

## 单位4：直角三角形

### 单元学习目标

学生建立对直角三角形  $\sin$  的理解，将余弦、正弦和正切命名为三角函数  $\sin$ 。他们使用三角学来查找缺失的边长和角度测量，并应用三角学来解决上下文中的问题。

### 单元说明

在本单元中，学生了解直角三角形中的  $\sin$ ，从而将余弦、正弦和正切命名为三角函数  $\sin$ 。

在开始本单元之前，学生将对直角三角形和相似性有相当的熟悉。他们在 4 等级中学会了识别直角三角形。学生在 8 年级学习了勾股定理，并利用相似直角三角形构建了斜率的想法。该单元建立在丰富的经验基础上，并以熟悉的环境中的三角函数  $\sin$  为基础。

整个单元构建了几个概念。学生首先使用相似的三角形创建直角三角形边长  $\sin$  的表格。花时间搭建和使用表格可以帮助学生在学习三角函数  $\sin$  的名称之前打下坚实的基础。

在第一次听到术语“余弦”和“正弦”之前，学生会注意到余弦和正弦列之间的模式。在随后的课程中，他们研究了这种关系，证明两个  $\sin$  的互补角相等。计算直角三角形中锐角的测量值遵循类似的弧线，学生首先使用表格进行估计，然后在后续课程中学习如何使用反正弦、反余弦和反正切计算给定边测量值的角度测量值。

当学生测量边长并计算  $\sin$  时，有机会讨论精度。在本单元中，大多数情况下，学生会将边长四舍五入到最接近的十分之一，并将角度测量到最接近的度数。当学生在上下文中解决问题时，他们会思考他们的答案是否合理，以及报告的适当精确度。

## A 部分：角度和陡度

### 本节学习目标

- 了解直角三角形的一个锐角决定了该三角形中所有边长的  $\sin$ 。
- 使用直角三角形边长  $\sin$  表证明估计边长或角度测量的合理性。

### 本节说明

在本节中，学生将使用直角三角形来构建三角学的基础。他们练习描述相似的直角三角形，以巩固任何具有全等锐角的直角三角形都是相似的想法。当学生为许多组直角三角形的边长  $\sin$  生成数据时，他们会扩展这种理解。这些数据被组织成一个表格，学生可以将其应用于解决问题。花时间搭建和使用表格可以帮助学生在学习三角函数  $\sin$  的名称之前打下坚实的基础。本节中的两个课程是可选的，因为标准没有特别要求特殊的直角三角形。这些课程是练习特殊直角三角形重要思想的机会，这些思想经常出现在高考中。

### 课时

1. 角度和陡度——让我们来解决直角三角形的问题。
2. 半个正方形（可选）——让我们研究一下正方形对角线的属性。
3. 半个等边三角形（可选）——让我们研究一下等边三角形的高的属性。
4. 直角三角形中的比——让我们研究直角三角形边长中的比。
5. 在直角三角形中使用比——让我们解决有关直角三角形的问题。

## B 部分：定义三角比率

### 本节学习目标

- 使用反余弦、反正弦和反正切计算直角三角形的角度测量值。
- 使用余弦、正弦和正切计算直角三角形的边长。
- 使用三角学来解决上下文中的问题。

### 本节说明

在本节中，学生学习使用三角学来解决问题。他们了解到名称“余弦”、“正弦”和“正切”对应于比表的列，并练习在计算器中查找给定角度的余弦、正弦或正切。他们使用这些值来计算直角三角形的边长。接下来，学生研究余弦和正弦之间的关系，证明两个比的余角相等。最后，学生学习如何使用给定的边长以及反正弦、反余弦和反正切求直角三角形的角度测量。在整个部分中，学生将三角学技能应用于多种情况。

### 课时

1. 使用三角函数比——让我们使用余弦、正弦和正切来解决问题。
2. 在直角三角形中应用比——让我们使用直角三角形和三角学来解决问题。
3. 正弦和余弦在同一个直角三角形——让我们连接余弦和正弦。
4. 三角函数平方——让我们连接一些三角函数比的平方。
5. 使用三角函数比求角——让我们逆向求直角三角形的角。

## C 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 用三角学解决问题——让我们解决有关直角三角形的问题。
2. 近似 Pi——让我们近似计算  $\pi$  的值。

## 单位 5：立体几何

### 单元学习目标

学生练习三维空间可视化。他们绘制横截面，研究表面积和体积在位似变换下如何缩放，使用卡瓦列里原理导出棱柱、圆柱、棱锥和圆锥的体积公式，并应用他们的理解来解决问题。

### 单元说明

在本单元中，学生练习三个维度的空间可视化。他们绘制横截面，研究位似变换，推导体积公式，并应用他们的理解来解决问题。

在以前的年级中，学生学习了固体的多个方面。在6等级中，他们开始计算直角矩形棱柱的表面积和体积。他们将这种理解扩展到7级直棱柱的体积和表面积，以及8级的球体、圆锥体和圆柱体。7年级的学生还描述了三维图形的横截面。

在未来的课程中，本单元中开发的可视化技能将适用于使用微积分计算体积或使用三个或更多维度的线性代数时。

学生通过检查旋转实体和各种实体的横截面开始本单元。他们在横截面和位似变换之间建立了联系，以看出金字塔的横截面可以被视为0和1之间比例因子的基础的位似变换。在本单元的后面，他们学习卡瓦列里原理：假设两个立体具有相等的高度。如果在距底座的所有距离处，两个实体的横截面具有相等的面积，则这两个实体具有相等的体积。将位似变换、横截面和卡瓦列里原理与解剖的概念相结合，学生可以推导出金字塔或圆锥体的体积公式。

当学生确认按比例因子 $k$ 进行位似变换时，面积乘以 $k^2$ ，体积乘以 $k^3$ ，就可以用平方根函数和立方根函数的图象说明变换后的面积或体积与比例因子的关系。本单元是学习根式函数的主要阶段；在以后的课程中，学生还会继续绘制函数图象，并解释点、系数和常数的含义。

在本单元中，学生可能会假设看起来倾斜的圆柱体或棱柱确实是倾斜的，而看起来正确的圆柱体或棱柱则是正确的。对于直立的圆柱体和棱柱，不标注直角，表示底面与侧面成直角。除非另有说明，所有以小数形式给出的答复均四舍五入到最接近的十分位。

## A 部分：横截面、比例和面积

### 本节学习目标

- 使用平方根图形和计算描述比例因子和面积之间的关系。
- 生成三维图形的多个横截面。
- 识别通过使用线性轴旋转二维图形而创建的三维实体。

### 本节说明

在本节中，学生练习空间可视化。首先，他们通过检查旋转实体来做到这一点。然后他们研究各种固体的横截面。他们创造物理表征来展示

对于介于 0 和 1 之间的比例因子，金字塔的横截面可被视为基础的 位似变换。学生研究 位似变换 对横截面和其他二维图形的影响，确定通过  $k$  的 缩放比例 进行扩张会将面积乘以  $k^2$ 。他们在这个几何背景下被介绍给 方程  $y = x^2$ 。他们创建了一个表示  $y = \sqrt{x}$  的图形，并用它来说明缩放后的 面积 和缩放因子之间的关系。

课时

1. 旋转实体——让我们旋转二维形状来制作三维形状。
2. 切片实体 - 让我们通过切片三维实体来分析横截面。
3. 通过膨胀创建横截面 - 让我们通过 位似变换 创建横截面。
4. 缩放和 面积 — 让我们看看当我们对形状进行 按比例缩放 时，形状的 面积 会如何变化。
5. 缩放和取消缩放——让我们检查一下放大图形的面积和比例因子之间的关系。

## B 部分：结垢固体

本节学习目标

- 理解：立体图形按比例因子  $k$  进行位似变换时，表面积乘以  $k^2$ ，体积乘以  $k^3$ 。
- 使用立方根图和计算描述比例因子和体积之间的关系。

本节说明

本节将比例缩放的研究扩展到立体图形。学生得出结论：立体图形按比例因子  $k$  缩放后，所有长度乘以  $k$ ，表面积乘以  $k^2$ ，体积乘以  $k^3$ 。他们根据变换后的表面积或体积反推比例因子，因此需要引入立方根。学生绘制  $y = \sqrt[3]{x}$  的图象，并用它回答体积变化如何影响对应比例因子的问题。

课时

1. 缩放实体 - 让我们看看当我们 按比例缩放 那些实体时，实体的 表面积 和 体积 如何变化。
2. 问题的根源——让我们用图表和情况来看看体积、面积和比例因子之间的关系。
3. 说到缩放——让我们练习在长度、表面面积和体积的缩放因子之间来回移动。

## C 节：棱柱体和圆柱体体积

本节学习目标

- 计算由直立棱柱、斜棱柱和圆柱体组成的固体的体积。
- 解释求棱柱体和圆柱体体积的方法之间的联系。

本节说明

在本节中，学生将重温以前年级的圆柱体 体积 以及以前课程的旋转实体。然后向学生介绍卡瓦列里原理：假设两个立体具有相等的高度。如果在距底座的所有距离处，两个实体的横截面具有相等的面积，则这两个实体具有相等的体积。这导致了这样的想法：棱镜或圆柱体的 体积

B 平方单位的底面 面积 和 h 单位的高度具有  $Bh$  立方单位的 体积，无论底面形状如何，也无论实体是否倾斜。如有必要，在本单元的其余部分中，为学生提供三角形、平行四边形和圆形的面积公式。注意，“圆的面积”被用作“由圆包围的区域的面积”的简写。

课时

1. 气缸体积 - 让我们分析气缸体积。
2. 横截面和 体积 — 让我们看看横截面和 体积 之间的关系。
3. 棱柱练习——让我们计算棱柱和圆柱的体积。

## D部分：了解金字塔体积

本节学习目标

- 计算棱柱、圆柱、圆锥和棱锥的体积和尺寸。
- 使用分解和卡瓦列里原理非正式地证明金字塔 体积 公式的合理性。

本节说明

在本节中，学生将 位似变换、横截面和卡瓦列里原理与解剖相结合，推导出金字塔或圆锥体的 体积 公式。首先，他们确定底边有 面积  $B$  正方形单位且高度为  $h$  单位的任何三棱锥都可以与另外两个相等的 体积 三角锥组合，形成与原始金字塔具有相同底和高的棱柱。每个棱锥体都有  $\frac{1}{3}$  和体积的棱镜。因此，原金字塔的体积为  $\frac{1}{3} Bh$ 。接下来，学生考虑一般金字塔，并将其与高度相等、底边 面积 相等的三角金字塔进行比较。由于所有对应的横截面都具有相等的 面积，因此卡瓦列里原理适用，并且两个金字塔具有相等的 体积。这将 体积 公式扩展到所有金字塔和圆锥体，无论底座的特定形状或实体是否倾斜。然后，学生有机会练习将 体积 公式应用于各种问题。这些活动包括代数运算和数学建模方面的机会。

课时

1. 棱柱和金字塔——让我们描述一下金字塔和棱柱之间的关系。
2. 为金字塔构建 体积 公式 — 让我们为任何金字塔或圆锥体的 体积 创建一个公式。
3. 使用金字塔——让我们使用金字塔 体积 公式来解决问题。
4. 将所有固体放在一起 - 让我们计算棱柱、圆柱、圆锥和棱锥的体积。

## E 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。因为这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，所以没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 表面积 和 体积 — 让我们使用 体积 和 表面积 来解决问题。
2. 体积 和 密度 — 让我们使用 体积 和 密度 来解决问题。

3. 体积 和绘图 — 让我们使用 体积 和绘图来解决问题。

## 单位 6：坐标几何

### 单元学习目标

学生通过使用函数变换、圆和抛物线的方程、直线（平行和垂直）的方程、几何定理的坐标证明和加权平均值，将代数和几何结合在一起。

### 单元说明

在开始本单元之前，学生将花费大部分课程学习坐标未描述的几何图形。然而，学生们已经看到了网格上的数字（特别是 8 年级中的变换）以及坐标平面上的直线和曲线（在之前的课程中）。本单元将学生往年的经验与本课程的新认识结合起来，深入学习坐标几何。

前几节课探讨了平面上的变换。学生会遇到一种新的坐标变换符号，它将变换与函数联系起来。学生使用  $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$  等规则变换图形，并将反射的几何定义和位似变换连接起来以协调生成它们的规则。他们使用包括距离（通过勾股定理）、角度（使用三角学计算）和变换定义在内的推理来证明对象是相似或全等的。

下一组课程的重点是从定义构建方程。学生通过距离镜头观察圆和抛物线。圆是距给定中心距离相同的点的集合，抛物线是距给定点（焦点）和直线（准线）等距的点的集合。根据这些定义，学生为圆开发一个通用的方程，并写出代表特定抛物线的方程。

该单元接下来进行协调证明。学生构建直线方程的点斜率形式。然后，他们在证明中应用变换的概念，写出并证明关于平行线和垂直线斜率的猜想。他们将这些想法应用于其他证明，例如四边形分类，并使用图来求解简单的方程系统，其中包括一次方程和二次方程。

在本单元结束时，学生使用加权平均值来划分线段、缩放图形并找到三角形中线的交点。学生找到三角形高的交点。然后有几个可选的活动，提供通往欧拉线或通过构建和描述镶嵌来练习线的方程的不同路径。

在最后一课中，学生在现实世界中探索纳斯卡线时，将运用他们对斜率和平面距离的理解。

## A 部分：平面内的变换

### 本节学习目标

- 比较和对比刚性变换、相似变换以及两者都不是的变换。
- 将变换描述为将平面上的点作为输入并将其他点作为输出的函数。

### 本节说明

本节重点是将转换理解作为一种函数。学生首先回忆早期单元的工作，因为他们使用 勾股定理 连接 坐标平面 中的刚性变换来识别线段的长度。然后向学生介绍转换的函数符号，因为他们将  $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$  识别为 平移， $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$  作为带有 缩放比例  $k$  的 位似变换，以及像这样的转换  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  作为 反射。他们还使用表格和图形来创建自己的函数规则来表示 坐标平面 中的转换。最后，学生比较变换函数并决定它们是否表示刚性变换、相似变换或两者都不表示。

课时

1. 平面中的刚性变换 - 让我们尝试使用 坐标 进行变换。
2. 转换作为函数——让我们将转换与函数进行比较。
3. 变换的类型——让我们分析产生全等和相似图形的变换。

## B 节：距离、圆和抛物线

本节学习目标

- 通过完成正方形来计算圆的圆心和半径。
- 使用 勾股定理 为给定焦点和准线的抛物线编写 方程。

本节说明

本节重点介绍 方程 的特征以及圆和抛物线图。在之前的单元中，学生将圆定义为距给定中心等距的点集。他们将此定义与 勾股定理 的工作联系起来，以便将具有 半径  $r$  和中心  $(h, k)$  的圆的方程概括为  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 。接下来，学生重新审视分配律，将平方二项式写成完美平方三项式，反之亦然。然后，学生确定完成三项式表达式的平方所需的常数，并以  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  的形式重写圆的方程，以确定其中心和半径。接下来，学生检查抛物线的图形属性，包括焦点和准线。他们观察到抛物线上的任何点到焦点和准线的距离相同，并且这个属性可以用来定义抛物线。最后，学生使用 勾股定理 计算点与焦点之间的距离，并将其与该点与准线之间的垂直距离进行比较。学生在写出准线为水平线的抛物线的一般方程时，会利用这些距离必须相等的事实。

课时

1. 距离和圆——让我们为圆构建一个方程。
2. 正方形和圆形 — 让我们看看分配律如何与圆的方程相关。
3. 完成正方形——让我们重写方程来找到圆的中心和半径。
4. 距离和抛物线——让我们分析与给定点和给定线距离相同的点集。
5. 方程和图形 — 让我们为抛物线编写方程。

## C部分：用代数证明几何定理

本节学习目标

- 计算将线段划分为给定 比 的线段上的点的 坐标。
- 计算三角形中线的交点。
- 确定通过给定点且与给定线平行或垂直的线的 方程。

### 本节说明

在本节中，学生重点关注用代数证明几何定理。首先，学生通过线的平移将点-斜率形式的线与他们的作品联系起来。然后，他们在此工作的基础上证明平行线具有相同的斜率。然后学生证明对边位于两对平行线上的四边形一定是平行四边形。接下来，学生证明垂直线的斜率是相反的倒数，或者斜率的乘积必须是-1。然后学生应用有关平行线和垂直线的定理来证明垂直于同一条线的两条非共线线彼此平行。然后，学生在检查圆和直线的交点时检查 坐标平面 中的曲线。他们使用 勾股定理 来查找位于直线和圆上的点。然后，他们应用有关 斜率 和 勾股定理 的定理对平面中的四边形进行分类。接下来，学生检查 比，因为他们使用加权平均值对段进行划分。他们还应用此方法来确定 位似变换 的坐标定义。最后，学生在探索其他三角形定理时有机会应用斜率和 勾股定理 的工作。

### 课时

1. 线路的 方程 — 让我们研究一下线路的 方程。
2. 平面中的平行线 — 让我们研究一下 坐标平面 中的平行线。
3. 平面中的垂直线——让我们分析一下垂直线的斜率。
4. 一切都在线上——让我们同时使用平行线和垂直线。
5. 交点——让我们看看圆和抛物线如何与直线相互作用。
6. 坐标证明——让我们使用 坐标 来证明定理并计算 周长 和 面积。
7. 加权平均值——让我们使用平均值和 比 来分割分段。
8. 三角形中的加权平均值——让我们将特殊线段划分为三角形。
9. 三角形中的线——让我们研究一下三角形中更特殊的线段。

## D 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 在平面上应用 面积 和 周长 — 让我们在现实世界中使用坐标几何。

## 单位 7：圆

### 单元学习目标

学生研究圆的几何形状，包括弦、弧、圆心角和内切角、切线、内接四边形、三角形的内接圆和外接圆、扇形面积、弧长和弧度测量。

### 单元说明

在本单元中，学生将更仔细地研究圆的几何形状。在7年级，学生使用圆的面积和圆周长公式来解决问题。在本课程的早期，学生进行了正式的几何构造，研究了相似性和比例推理，并证明了有关直线和角度的定理。本单元建立在这些技能和概念的基础上。在代数 2 中，当学生将单位圆与三角函数联系起来时，本单元中学到的概念将很有帮助。

学生定义术语“弦”、“弧”和“圆心角”，然后观察内切角是其相关圆心角的一半，并写出全等弦和相似三角形的相关证明。在本单元中，学生还将构造与圆相切的线，并证明切线垂直于绘制到切点的半径。

接下来，学生证明循环四边形的性质，并利用之前单元中对垂直平分线的理解来构造具有外接圆的三角形并定义“外心”。然后，学生使用角平分线构造三角形和三角形内切圆的内心。

在下一节中，学生将开发计算扇形面积和弧长的方法，然后学生将“圆心角的弧度测量”定义为由角度定义的弧长与圆的半径的商。他们通过对圆的部分进行阴影处理并使用双数轴来提高弧度测量的流畅性。

在最后一课中，学生运用他们所学到的有关圆的知识来解决上下文中的问题。

在本单元中，学生将进行多种构造。不需要特别选择施工工具。折纸以及直尺和圆规移动都是可以接受的方法。

## A 部分：直线、角度和圆

### 本节学习目标

- 确定圆心角、内接角和弧的尺寸。
- 利用半径、弦和切线之间的关系来证明几何定理。

### 本节说明

在本节中，学生将遇到新型角度和由圆定义的数学对象。首先，学生写出“弦”、“圆心角”和“弧”的定义，并利用他们的新理解写出关于圆中全等弦的证明。然后，学生使用这些定义来推测内切角的性质，并加深对内切角定理的理解。最后，学生证明有关圆的切线的陈述，并分析圆心角、切线和外接角之间的关系。

### 课时

1. 直线、角度和曲线——让我们定义一些与圆相关的线段和角度。
2. 内接角——让我们分析一下由弦构成的角。

3. 切线 - 让我们探索在 1 点与圆相交的线。

## B 节：多边形和圆形

### 本节学习目标

- 构造三角形的内切圆和外接圆。
- 证明圆内切四边形的角的性质。

### 本节说明

在本节中，学生学习使用圆来确定三角形和其他多边形的特征。首先，学生使用外接圆来求出循环四边形的角度测量和性质。然后，学生使用三角形的外接圆，以及他们对之前单元中垂直平分线的理解，得出三角形的所有三个垂直平分线都相交于其外心的结论。最后，学生分析角平分线的特征，定义（三角形的）“内心”，并构造内切圆。

### 课时

1. 圆中的四边形——让我们研究一下适合圆的四边形。
2. 圆中的三角形——让我们看看垂直平分线与外接圆的关系。
3. 特别一点——让我们看看通过观察盐如何堆积在三角形上，我们可以了解三角形的哪些内容。
4. 三角形中的圆——让我们在三角形内构建尽可能大的圆。

## C 部分：测量圆

### 本节学习目标

- 理解以圆心为顶点的角度的弧度测量值是由该角度与圆的半径定义的弧长的比。
- 以度数和弧度测量的角度表示形式之间的坐标。
- 推广计算圆弧长度和扇形面积的方法。

### 本节说明

在本节中，学生将学习圆的某些不同部分的度量之间的关系。首先，学生分析圆扇形并找出扇形面积和弧长。然后，学生研究角度测量、半径和弧长之间的关系，以查找给定圆的未知信息。接下来，学生将逐步学习弧长和圆心角之间的关系，从而形成“弧度”的定义。利用他们对弧度的理解，学生最终通过比较角度和弧度的度量来建立对弧度大小的直觉。

### 课时

1. 弧和扇形——让我们分析一下圆的各个部分。
2. 从部分到整体——让我们看看，如果我们得到有关圆的扇区的信息，我们能对圆做出什么推断。
3. 角度、圆弧和半径 — 让我们分析一下弧长、半径和圆心角之间的关系。
4. 测量角度的新方法 — 让我们看看测量角度的新方法。

5. 弧度感——让我们了解一下以弧度测量的角度的大小。
6. 使用弧度——让我们看看弧度如何帮助我们计算扇形面积和弧长。

## D 部分：让我们付诸实践

### 本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

### 课时

1. 把它们放在一起——让我们用几何来解决问题。

## 单位 8：条件概率

### 单元学习目标

学生将对 概率 的理解扩展到复合事件。他们使用列表、表格、树和维恩图来表示样本空间，应用 加法规则 和 乘法规则，定义条件 概率，并使用 概率 来测试事件的独立性。

### 单元说明

在本单元中，学生通过 7 年级的介绍来扩展对 概率、样本空间和事件的理解。正在考虑的机会实验有多个部分，例如滚动数字立方体，然后抛硬币——允许以新的方式考虑 样本空间 内的事件。

本单元首先让学生创建不同的模型来理解样本空间和 概率。这些模型包括表格、树、列表和维恩图。维恩图允许学生可视化 样本空间 的各种子集，例如“ $A$  和  $B$ ”、“ $A$  或  $B$ ”或“非  $A$ ”。表格可帮助学生确定出现的这些子集的 概率，并支持学生对 加法规则  $P(A \text{ 或 } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ 且 } B)$  的理解。

通过几个游戏和与日常情况的联系来讨论和应用条件 概率。特别地，乘法规则  $P(A \text{ 且 } B) = P(A) \cdot P(B | A)$  用于确定条件概率。条件 概率 导致对事件独立性的研究。当事件  $A$  和  $B$  独立时，学生使用日常语言描述独立性并使用 方程  $P(A | B) = P(A)$  和  $P(A \text{ 且 } B) = P(A) \cdot P(B)$ 。

本单元最后，学生在互相玩游戏时对事件的独立性做出猜想，然后通过收集数据和分析结果来测试这些猜想。

## A 部分：取决于机会

### 本节学习目标

- 使用有组织的列表、表格和树形图来计算复合事件的概率。
- 使用加法规则来计算概率。

### 本节说明

在本节中，学生将重温 概率 事件。他们会想起事件的 概率 与多次试验后偶然实验导致该事件的次数比例之间的联系。然后，学生查看复合事件，并探索使用列表、表格、树和维恩图来跟踪 样本空间 中的事件的方法。然后，学生可以通过 加法规则  $P(A \text{ 或 } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ 且 } B)$  建立不同事件组合之间的联系。如果学生可以从有关 概率 的额外提醒中受益，则本节开头包含一门可选课程。

### 课时

1. 由机会决定（可选）——让我们探索概率。
2. 玩转 概率 — 让我们探索 概率。
3. 样本空间——让我们仔细看看样本空间。
4. 相对频率表——让我们使用表格来组织概率。
5. 组合事件——让我们看看描述由其他事件组成的事件的方法。

6. 加法规则 — 让我们了解并使用 加法规则。

## B 部分：相关事件

本节学习目标

- 使用概率确定两个事件是独立的还是相关的。
- 使用乘法法则  $P(A \text{ 与 } B) = P(A) \cdot P(B | A)$  求事件的概率。

本节说明

在本节中，学生将查看成对的事件，以确定它们是相关事件还是独立事件。定义术语后，学生进行一些经典的统计实验，并练习利用他们对相关事件的理解来解释结果为何有意义。然后学生遇到 乘法规则  $P(A \text{ 且 } B) = P(A) \cdot P(B | A)$ ，然后用它来测试事件的独立性。

课时

1. 相关事件——让我们看看事件是如何相关的。
2. 条件 概率 — 让我们检查一下条件 概率。
3. 使用表格进行条件 概率 — 让我们使用表格来估计条件概率。
4. 使用 概率 确定事件是否独立 - 让我们仔细看看相关事件和独立事件。

## C 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。因为这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，所以没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 游戏中的概率（可选）——让我们在游戏中使用 概率。

## 关于本课程大纲

本课程大纲根据 accessim.org 上公开的 Illustrative Mathematics 9-12 AGA v.360 课程编制而成。单元和章节的叙述、目标和课程标题均来自教师的观点。可选课程标记为“（可选）”。源课程中引用了评估（单元前检查、检查点、单元中期和单元结束评估），但需要 Kendall Hunt 教育者帐户才能查看；它们不包括在这里。

<https://accessim.org/9-12-aga/geometry?a=teacher>