

代数 2

完整课程大纲

Illustrative Mathematics® 9-12 AGA (v.360)

8 单元 • 单元目标 • 部分目标 • 逐课大纲

来源: <https://accessim.org/9-12-aga/algebra-2?a=teacher>

已授权 CC BY-NC 4.0 • © Illustrative Mathematics

课程概览

Illustrative Mathematics 9-12 AGA 课程的代数 2 被组织为 8 单元。学生在之前的线性、二次和指数函数工作的基础上探索 多项式 和有理函数；将 指数 规则扩展到有理 指数 并引入复数；开发对数函数；研究函数变换；从单位圆建立三角函数；并利用研究设计、正态分布、抽样变异性和实验分析进行统计推断。

单元顺序为：

- 单元 1：序列和函数
- 单元 2：多项式函数
- 单元 3：有理函数和方程
- 单元 4：复数和有理指数
- 单元 5：指数函数和方程
- 单元 6：函数的变换
- 单元 7：三角函数
- 单元 8：统计推论

每个单元都分为字母部分（A、B、C、D、E（如适用）），每个部分都是一系列日常课程。可选课程标有“（可选）”。

单元 1：序列和函数

单元学习目标

学生通过序列重新审视函数，将算术和几何序列视为仅限于整数域的线性和指数函数，并使用序列表示和建模情况。

单元说明

本单元为学生提供了通过序列重温函数的机会。通过许多具体示例，学生将看到算术和几何序列作为线性和指数函数，仅限于整数子集的域。本单元通过使用多种表示形式（包括图形、表格和表达式）来加强对函数的理解。首先要求学生用非正式语言描述序列，并学习识别序列是几何序列、算术序列还是两者都不是。学生在加法中写出数学情境中产生的序列项，以解释和创建有关给定关系的表格和图表。学生了解到序列是一种函数，其中输入变量是位置，输出变量是该位置处的项。他们学习解释序列，然后使用函数符号编写自己的序列递归定义。学生在序列和函数的不同表示之间建立联系。然后，学生根据线性和指数函数的先验知识，开发算术和几何序列的显式公式，并对以不同方式表示的几种情况进行建模。在本单元的最后一部分，学生使用序列来模拟以不同方式表示的几种情况。这项工作旨在触及建模时必须注意的一些实践，例如选择一个好的模型和确定适当的领域。学生还认识到序列是用作这些情况的模型的合适函数类型，因为每种情况的域都是整数的子集。最后，学生会遇到一些计算有限序列之和有意义的情况。

A 部分：序列

本节学习目标

- 确定算术数列和几何数列中缺失的项。
- 确定等比数列的增长因子和等差数列的变化率。

本节说明

在本节中，学生将学习序列。学生重点关注几何和算术序列，确定缺失值，计算增长因子和变化率，并使用表格和图表表示序列。本节的最后一课是可选的。它提供了教学生如何使用电子表格和图形技术的活动，这对于处理序列很有用，并为学生提供了更多选择，以便在未来的工作中战略性地选择合适的工具。关于语言和符号的注释：在之前的课程中，学生可能已经了解到比是两个或多个数量之间的关联。在更高级的工作中，例如本课程，“比”通常用作“商”的同义词。随着术语“通用比”的引入，“比”一词的扩展使用在本节中发挥作用。

课时

1. 高耸的序列——让我们探索河内塔。
2. 介绍几何序列——让我们探索增长和收缩的模式。

3. 不同类型的序列——让我们看看其他类型的序列。
4. 使用技术处理序列（可选）- 让我们使用技术来创建序列。

B 节：表示序列

本节学习目标

- 根据给定信息创建序列的表、图形或递归定义。

本节说明

在本节中，学生将学习序列是函数以及如何使用函数符号递归地定义序列。为了加强对递归定义的理解，学生练习用表格和图表以熟悉的方式表示序列。在本节中，学生与同学交换问题、想法和策略。关于学生在编写定义序列的方程时使用的符号，请避免过于规范。学生能够正确描述规则比他们能够以特定格式执行更重要。

课时

1. 序列是函数——让我们学习如何递归地定义序列。
2. 表示序列——让我们看看表示序列的不同方法。
3. 表示更多序列——让我们了解信息间隙。

C 部分：方程是什么？

本节学习目标

- 为表示情况的序列创建方程。
- 根据上下文识别序列域的限制。

本节说明

在最后一部分中，学生研究函数的域，探索方程的类型，并编写方程来定义给定表格、视觉模式和情况的序列。学生首先从序列的递归定义转向显式定义，并继续在序列和函数之间建立联系。学生还探索改变域如何改变序列的方程，并考虑给定上下文的合理域。学生还考虑递归和显式方程之间的选择如何取决于他们想要做什么，以及某些表示比其他表示更能有效地实现他们的目标。接下来，学生练习为可以用序列表示的现实和抽象情况编写方程，并使用他们创建的模型来回答问题。最后，学生将他们的序列知识应用到几种可以求和的情况中。

课时

1. 第 n 项 — 让我们定义序列。
2. 情况和序列类型——让我们决定我们正在查看什么类型的序列以及如何表示它。
3. 加起来——让我们看一下序列及其项的总和。

单元 2：多项式函数

单元学习目标

学生将线性函数和二次函数的工作扩展到更高阶的多项式，在标准形式和分解形式之间灵活移动，根据关键特征（零、重数、最终行为）绘制图表，并除以多项式以应用余数定理。

单元说明

本单元在学生研究更高级的多项式时，扩展了学生之前在线性和二次函数方面的工作。学生以不同的形式重写多项式，认识到各种形式对于揭示图表关键特征结构的能力的好处。本单元首先介绍可以通过多项式函数建模的两种情况。学生了解多项式是什么以及它们的图表是什么样子。当学生探索有理函数的最终行为时，某些方面（例如最终行为）在后面的单元中将很重要。重点关注以因式形式表达的函数及其图形，学生将因式表示函数的零和水平截距联系起来。次数和前导系数对最终行为的影响以及重数对函数零点附近的图形形状的影响一起建立。考虑到所有这些特征，学生学习绘制以线性因子的乘积表示的多项式函数。在之前的课程中，学生使用了相乘因子的分配律，并且还分解了二次方程。复习这些技能并将其应用于更高学位的多项式的机会嵌入在整个单元和实践问题中。这为学生准备最后部分做好准备，其中学生相除和多项式由可疑因素以标准形式编写。从这里开始，除法和乘法方程之间的联系用于建立余数定理。由此可以得出这样的结论：如果多项式的某个值为零，那么它也必须具有相应的线性表达式作为因子。

A 部分：什么是多项式？

本节学习目标

- 概括地说，当多项式与加法、减法或乘法组合时，结果是多项式。
- 识别并解释多项式及其图表的相对最小值、相对最大值、次数和常数项。

本节说明

本节向学生介绍不同形式的多项式，并将多项式的方程的特征与他们的图表联系起来。学生首先探索可以通过多项式建模的两个上下文。首先，学生从一张矩形纸的每个角剪出相同的正方形，然后将其折叠以创建一个打开顶盒。盒子的体积是方形切口边长的函数，并且最容易通过以因子形式编写的三次函数来表达。接下来，学生考虑一项每年赚取利息的投资，并且最容易通过以标准形式编写的多项式进行建模。这两个示例展示了多项式的形式如何使某些函数更加清晰。学生继续探索以标准形式编写的多项式，首先将方程与图形匹配，然后使用技术探索如何编写图形中具有特定函数的方程。最后，学生考虑整数算术运算与多项式算术运算之间的相似之处。他们概括说，与整数一样，两个多项式的加法、减法和乘法会产生另一个多项式。当划分两个多项式时，情况并非总是如此。

课时

1. 让我们做一个盒子——让我们研究一下不同盒子的体积。
2. 为未来提供资金——让我们研究一下可以用函数建模的投资情况。
3. 多项式简介 — 让我们看看 多项式 是什么样子。
4. 组合 多项式 — 让我们用 多项式 进行算术运算。

B 部分：使用多项式

本节学习目标

- 通过以标准或因式形式表示多项式来确定多项式的属性。
- 给定函数的水平截距，生成 多项式 函数的可能表达式。
- 识别以因式分解形式编写的多项式函数的零点。

本节说明

本节中，学生认识多项式的标准式和因式分解式各自突出哪些特征，并利用结构在两种形式之间灵活转换。学生先观察多项式的因式与其图像的 x 轴截距之间的规律。他们把此前对二次式的认识推广为：若几个因式的乘积在某个 x 值处等于 0，那么至少有一个因式在该 x 值处也等于 0。接着，学生认识到因式分解式适合求零点和 x 轴截距，而标准式更适合判断多项式的次数和常数项。他们运用分配律，把多项式从因式分解式改写为标准式。最后，学生研究常数因子对多项式图像的影响，根据给定的横轴截距写出可能的多项式方程，并在使用绘图工具时选择合适的显示范围。

课时

1. 连接因子和零——让我们研究一下以因子形式编写的 多项式。
2. 不同的形式——让我们使用 多项式 的不同形式来了解它们。
3. 使用因子和零——让我们写一些 多项式。

C 节：多项式图

本节学习目标

- 计算多项式方程组的解。
- 创建具有特定最终行为的多项式函数的方程。
- 使用零和重数绘制以因子形式给出的 多项式 函数的图形。

本节说明

在本节中，学生使用 多项式 函数的特征（例如因子、次数和重数）来绘制图形并描述最终行为。他们首先注意到 多项式 的阶数与其图形形状之间的模式，学习精确的语言来描述当输入在正方向或负方向上越来越大时函数会发生什么情况。学生在探索领先 系数 的符号和多种因素如何影响 多项式 图形时，会继续注意到模式。学生将所有这些考虑因素

他们一起绘制以因子形式书写的多项式图表。最后，学生在之前使用线性方程系统的工作基础上，求解至少包含一个二次方程的方程系统。他们使用绘图和代数策略来查找两个多项式函数的交点。

课时

1. 最终行为（1 部分）- 让我们研究一下多项式的形状。
2. 最终行为（2 部分）- 让我们描述一下多项式的最终行为。
3. 多重性——让我们画出一些多项式函数的草图。
4. 寻找交点——让我们同时考虑两个多项式。

第 D 节：多项式除法

本节学习目标

- 一般而言，对于多项式和数字 c ，除法上除以 $(x - c)$ 的余数是多项式在 c 处的值。
- 将多项式重写为线性因子的乘积。

本节说明

在本节中，向学生介绍多项式除法。他们首先使用图表来帮助推理分配属性。接下来，他们探讨了长除法与整数以及长除法与多项式之间的相似之处。他们将使用长除法的算法与完成图表时使用的推理进行比较。接下来，使用信息间隙结构，学生将他们所学到的有关多项式的所有知识结合起来，在给定一个线性因子的情况下，绘制出以标准形式编写的多项式的图形。他们必须首先使用除法将多项式重写为线性因子的乘积，然后考虑每个因子的次数、零点和重数，以便绘制多项式的图，包括最终行为。学生一边比较除整数时的余数的含义和除多项式时的余数的含义，一边继续建立联系。他们利用这样的事实：如果线性表达式是多项式的因子，则除法上的余数为零。还向学生简要介绍了余数定理，该定理指出：当多项式除以 $(x - c)$ 时，余数等于多项式在 c 处的值。

课时

1. 多项式除法（部分1）- 让我们学习一种相除多项式的方法。
2. 多项式除法（部分2）——让我们学习一种与相除多项式不同的方法。
3. 关于多项式你了解多少？— 让我们总结一下到目前为止我们对多项式的了解。
4. 余数定理 — 让我们将除法和余数定理联系起来。

单元 3：有理函数和方程

单元学习目标

学生从多项式过渡到有理函数和方程，分析渐近行为，求解有理方程（包括识别无关解），证明多项式恒等式，并推导有限几何级数和公式。

单元说明

在“多项式函数”单元基础上，本单元进一步学习有理函数、有理方程和恒等式。先通过最小化表面积、计算平均成本等建模情境认识有理函数。学生研究函数图象的渐近性质及其与方程结构的关系，并利用多项式除法改写有理式，分析函数两端的变化趋势。接着求解有理方程，理解某些解法为何会产生不满足原方程的候选解，即“增根”。最后学习恒等式，在证明或否定两个表达式等价的过程中提高代数变形能力。单元结束时回到上一单元研究的等比数列，利用本节开始证明的多项式恒等式推导有限等比级数求和公式，再用它解决问题。

A 部分：有理函数

本节学习目标

- 从方程中识别有理函数的渐近线。
- 在上下文中解释有理函数。

本节说明

本节通过连接函数方程和图形的特征（例如垂直和水平渐近线）向学生介绍有理函数。第一课特意呼应“多项式函数”单元的第一课，重点关注几何概念。这鼓励在课程中比较有理函数和多项式函数，然后在最后揭示多项式是一种特定类型的有理函数。在本节中，学生在建立有理函数的不同表示之间的联系时，会接触到现实世界和抽象背景。学生理解垂直渐近线附近有理函数的行为。他们对最终行为的理解随着水平渐近线的引入而发展。本节的最后一课重新介绍了使用多项式长除法来以不同的方式查看方程的结构，揭示最终行为与有理方程的分子和分母的度之间的关系。

课时

1. 最小化表面积 — 让我们研究不同圆柱体的表面面积。
2. 有理函数图（1 部分）——让我们探索有理函数的图和方程。
3. 有理函数图（2 部分）——让我们了解水平渐近线。
4. 有理函数的最终行为——让我们探索有理函数的最终行为。

B 节：有理方程

本节学习目标

- 创建涉及有理表达式的简单方程来解决问题。
- 求解涉及有理式的方程，并找出任何无关的解。

本节说明

本节的重点是求解有理方程。学生首先编写并求解方程，其中涉及等于有理数的有理表达式。随着课程的进展，学生将解决越来越具有挑战性的有理方程，最后一课的重点是了解如何出现无关的解决方案。

课时

1. 分式方程（1 部分）——让我们编写并解决一些有理方程。
2. 分式方程（2 部分）——让我们编写并解决一些更多分式方程。
3. 解决分式方程——让我们思考如何战略性地解决分式方程。

C 节：多项式恒等式

本节学习目标

- 证明身份。
- 使用几何数列中前 n 项之和的公式来解决问题。

本节说明

本节旨在帮助学生熟练处理更复杂、规模更大的方程。前两课学习恒等式及判断一个等式是否为恒等式的方法。学生在这两课中证明一个重要的多项式恒等式，为后两课学习的有限等比级数求和公式奠定基础。学生练习在抽象问题和实际情境中应用该公式。用语说明：由于级数超出本课程范围，此处不向学生引入“级数”一词。学生材料改用“有限等比数列各项之和”的说法，与先前的数列学习衔接。

课时

1. 多项式身份（1 部分）- 让我们了解一下多项式身份。
2. 多项式身份（2 部分）——让我们探索一些其他身份。
3. 总结——让我们找出一种更好的方法来计算相加数字。
4. 使用总和——让我们计算一些总数。

单元 4：复数和有理指数

单元学习目标

学生将指数规则扩展到有理指数，求解涉及平方根和立方根的方程，发展复数的概念，并用实数或复数求解二次方程。

单元说明

在本单元中，学生利用他们对指数和根式的了解来扩展指数规则以包括有理指数，求解涉及平方和平方根的方程，加深对复数的理解，并求解包含复数根的二次方程。本单元首先对指数规则进行可选审查，然后再使用这些规则来证明部首方面的有理指数的合有理。新规则引发了对平方根和立方根作为方程解的探索。特别是，学生了解到正数有两个平方根，并且根号仅代表正根。学生探索涉及平方根和立方根的方程，认识到对方程的每一边进行平方可以引入与原始方程不同的解。第三部分通过提出 i 作为方程 $x^2 = -1$ 的解来介绍虚数和复数。学生通过将其表示在实数轴的虚轴上来探索这种新型数字的含义。这种探索包括将虚数和实数相加得到复数，然后进行复数的加法和乘法。接下来，学生利用对复数的新理解来求解更多二次方程。最后，可以选择使用与数据成比例的面积圆来探索地图上的数据表示，其中学生必须利用他们对平方根的理解来找到适当圆的半径。

A 部分：指数属性

本节学习目标

- 使用根式和指数来表示数字。

本节说明

本节中，学生运用指数运算法则理解有理数指数。例如，对正数 x ， x 的二分之一次幂表示 x 的平方根。前两课可选作指数运算法则以及平方根、立方根几何意义的复习；如果学生已掌握这些概念，可以跳过。随后，学生研究指数为单位分数的代数式，运用指数法则认识有理数指数与根式之间的关系，再把认识扩展到其他正有理数指数，最后扩展到任意有理数指数。

课时

1. 指数的属性（可选）- 让我们使用整数指数。
2. 平方根和立方根（可选）——让我们考虑一下平方根和立方根。
3. 指数是单位分数 — 让我们像二分之一和三分之一一样探索指数。
4. 正有理数指数 — 让我们用根来写指数，即分数。
5. 负有理数指数 — 让我们研究一下负有理数指数。

B 部分：求解具有平方根和立方根的方程

本节学习目标

- 计算根式方程的解。
- 解释为什么根式方程有 0 解或 1 解。

本节说明

在本节中，学生将熟悉涉及平方根和立方根的方程。他们在本节开始时认识到正数有两个平方根，并认识到理解代表正平方根的根号符号的好处。然而，当学生发现求解涉及平方根的方程有时会导致方程的解不是原始方程的解时，这种限制导致需要谨慎。在认识到对于立方根不需要这种谨慎之后，学生求解方程，包括平方根和立方根。本节以可选课程结束，可用于额外练习。请注意，学生还没有接触过虚数，因此在本节中，材料都说方程（例如 x 的平方等于负数）没有解。当学生稍后在本单元中遇到虚数和复数后，将对实数解进行区分。

课时

1. 平方和平方根 — 让我们将方程与平方和平方根进行比较。
2. 不等价方程？ — 让我们看看当我们将方程的每一边都平方时会发生什么。
3. 立方和立方根 — 让我们将方程与立方和立方根进行比较。
4. 求解根式方程（可选） — 让我们练习求解根式方程。

C 节：一种新的数字

本节学习目标

- 相加、减去和相乘复数，并以 $a + bi$ 的形式表示解。

本节说明

在本节中，向学生介绍虚数和复数。在被提醒曾经有一段时间负数对他们来说是新的并且需要一段时间才能理解如何使用它们后，学生们被告知 i 是另一种新的数字。正如正数轴被扩展以显示负值一样，实数轴被扩展以创建一个复平面来可视化虚数和复数。然后，学生学习如何计算相加和相乘复数。可选课程是一个超越标准的机会，了解复数的递增幂如何遵循某种模式。通常将复数写成 $a + bi$ 的形式，并用实数 a 和 b 表示。本节材料通常遵循此约定。

课时

1. 一种新的数字 — 让我们发明一个新的数字。
2. 介绍数字 i — 让我们来认识一下 i 。
3. 复数算术 — 让我们来处理复数。
4. 复数相乘 — 我们来计算相乘复数。
5. 更多复数算术（可选） — 让我们练习复数的加法、减法和乘法。
6. 逆向工作 — 让我们使用我们所学到的复数相乘知识。

第 D 部分：求解复数二次方程

本节学习目标

- 创建具有实数或非实数解的二次方程。
- 求解二次方程，并解释求解方法。

本节说明

在本节中，学生将返回求解二次方程。这一次，他们能够找到任何真实或复杂的解决方案。学生使用推理、完成平方和二次公式来求解方程。学生使用二次公式的结构来帮助确定解的数量和类型。虽然提到了判别式，但不应该要求学生将表达式与二次公式分开记忆。他们应该能够推理二次公式中的项，以确定解是实数还是复数。本节的第一课是可选的，因为它回顾了如何完成平方并使用二次公式来求解二次方程。如果学生能够熟练掌握这一策略，则可以安全地跳过本课。本节的最后一课是可选练习，学生可以创建自己的二次方程，以便获得所需数量和类型的解决方案。

课时

1. 求解二次方程（可选）- 让我们求解二次方程方程。
2. 完成平方和复数解 — 让我们通过完成平方来找到二次方程的复数解。
3. 二次公式和复数解 — 让我们使用二次公式来找到二次方程的复数解。
4. 实数和非实数解（可选）- 让我们创建具有特定类型解的二次方程。

E 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 绘制比例圆（可选）— 让我们绘制一张数据图。

单元 5：指数函数和方程

单元学习目标

学生将指数函数扩展到有理和连续输入，引入对数作为求解指数方程的方法，研究常数 e ，并使用指数和对数函数及其图形来建模和解决问题。

单元说明

在本单元中，学生探索指数和对数函数。该单元首先让学生回忆几何序列，并通过恒定的增长因子将值的增长或衰减联系起来。这导致使用 $f(x) = a \cdot b^x$ 形式的函数来表达指数关系，其中 a 是当 x 是 0 且 b 是增长因子时函数的值。学生使用不同的有理输入，包括负值和整数之间的值，以更好地理解指数函数及其在各种情况下的含义。这包括探索不同长度间隔内的生长因子。例如，可以使用每十年的增长因子或每年不同的增长因子来描述相同的人口增长。对用作指数的变量的探索导致需要求解变量的方程并引入对数。向学生展示传统的对数模式，并要求他们找到模式和关系，这使他们发现对数代表了重写指数方程的一种方法。介绍常数 e ，学生将 $a \cdot b^x$ 形式的函数与 $a \cdot e^{(kx)}$ 形式的函数进行比较。最后，学生使用图形和代数方法求解指数和对数方程，然后在上下文中解释解。本单元中的对数主要集中在底数 10、2 和 e 上，尽管也提到了其他正底数。请注意，在整个单元中，指数表达式和对数的基数均假定为正。

A 部分：增长和收缩

本节学习目标

- 在上下文中解释指数函数的有理输入的含义。
- 了解指数函数在相等的时间间隔内以恒定因子变化。

本节说明

在本节中，学生将重新审视几何序列以及固定百分比的增长和衰减，以开始思考指数函数。然后，学生对不同类型的有理输入（例如负值或整数之间的值）进行数学和上下文理解。学生认识到指数函数在相等长度的间隔内以相同倍数增长或衰减。然后，他们运用这种理解来认识到，一定长度的子区间上的增长必须按相应的因子增长或衰减。学生利用对增长因子的理解，转换输入的单位，例如将代表几十年的输入编写的函数转换为代表年份的输入。本单元早期提供一门可选课程，用于额外复习连接指数函数的不同表示形式，例如口头描述、表格、图表和方程。本单元稍后提供另一门可选课程，供学生练习使用他们对指数衰减的理解以及非负整数的输入。

课时

- 增长和收缩——让我们计算指数变化。
- 增长和衰退的表示（可选）——让我们重新审视一下表示指数变化的方法。

3. 理解有理输入——让我们看看输入值不是非负整数的指数函数。
4. 在有理输入上表示函数——让我们看看数量是如何在分数时间间隔内增长或衰减的。
5. 有理区间的变化——让我们看看当输入发生小数变化时指数函数如何变化。
6. 为指数函数编写方程——让我们决定为指数函数编写方程需要哪些信息。
7. 解释和使用指数函数（可选）——让我们探索古代事物的时代。

B 节：缺失指数

本节学习目标

- 创建指数和对数形式的等价方程。
- 估计对数表达式的值。

本节说明

在本节中，学生将首先认识到需要找到一种方法来获取未知指数的值，然后检查 $\log$ 表的结构以找到指数与表中值之间的联系，从而向学生介绍对数。首先使用基数 10 引入对数，因为它们很常用，并且更容易看出与数字中位数的联系。然后向学生介绍以 2 为底的对数，然后将他们的理解扩展到其他底。学生学习如何使用计算器计算以 10 为底的对数值，但仅当解为整数时才需要知道其他底数的对数。对于其他值，仅要求学生估计连续整数之间的值。

课时

1. 未知的指数——让我们找到未知的指数。
2. 什么是对数？——让我们了解一下对数。
3. 解释和编写对数方程——让我们看看不同底数的对数。
4. 评估对数表达式——让我们找到一些对数！

C 部分：常数 e

本节学习目标

- 解释 $a \cdot e^{(kt)}$ 形式的指数函数方程中的参数。

本节说明

本节介绍常量 e ，该值通常用作表现出连续增长的指数函数的基础。首先，他们寻找 e 和表达式 $(1 + 1/n)^n$ 之间的联系。然后，学生会比较连续增长率与离散增长率的背景，然后使用自然对数作为解决源自这些背景的方程的方法。

课时

1. 数字 e ——让我们了解一下数字 e 。

2. 以 e 为基数的指数函数 — 让我们看看可以使用以 e 为基数的指数函数进行建模的情况。
3. 求解指数方程 — 让我们使用对数求解方程。

D 节：对数函数和图形

本节学习目标

- 使用图形和对数来计算或估计指数方程的解。

本节说明

在本节中，学生使用图表来更好地理解对数函数。他们使用图表来近似指数和对数方程的解，然后在上下文中解释这些解。他们还比较了具有不同底数的对数函数的图形。

课时

1. 使用图表和对数来解决问题（1 部分）——让我们使用图表和对数来解决问题。
2. 使用图形和对数解决问题（2 部分）——让我们通过研究指数函数的图形来比较它们。
3. 对数函数——让我们绘制 $\log$ 函数的图表。

E 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 对数函数的应用（可选）——让我们测量酸度水平和地震强度。

单元 6：函数的变换

单元学习目标

学生研究如何通过输入和输出的平移、反射和缩放来转换函数，概括偶对称性和奇对称性，并将转换应用于对现实世界数据进行建模。

单元说明

在本单元中，学生将函数视为一个整体，并了解如何对其进行转换以适应情况的需要，这是数学建模的一个方面。在学习本单元之前，学生已经使用过多种函数类型，例如多项式、根式和指数。学生将在后面的单元中以这项工作为基础来变换周期函数。通过将三角函数的介绍留到研究变换之后，学生有机会从新的角度重新审视变换，这强化了这样的想法：所有函数，甚至周期性的单个单位，在平移、反射和比例因子方面的行为方式都是相同的。该单元首先让学生非正式地描述图形的转换，引出他们的先验知识，并建立将在整个单元中完善的语言。学生通过垂直和水平平移以及跨轴的反射来开始他们的调查。这导致函数的代数和几何描述为偶数、奇数或两者都不是。学生通过探索函数的输入和输出乘以缩放比例的效果来继续加深理解。然后，学生将对平移、反射和缩放的理解应用到许多函数类型的图形和方程中。本单元结束时，学生将转换应用于不同的函数，以对现实世界的数据集进行建模。

A 部分：平移、反射和对称性

本节学习目标

- 创建方程来表示图形的已知平移和反射。
- 从方程中证明函数为何是偶数、奇数或两者都不是。
- 使用函数符号来表示从一个图到另一个图的转换。

本节说明

在本节中，学生考虑保留原始函数形状的函数变换。它们从垂直和水平平移以及水平和垂直轴上的反射开始。学生在学习二次函数时已经看到了这些类型的变换。本节将这种理解扩展到所有函数类型。首先，学生考虑两个可能函数的图表是否适合描述留在室外的水瓶温度的数据集，并就为什么其中一个更适合进行论证。当学生学习更多方法来转换给定的方程以适应数据时，学生将在以后的课程中返回到该数据集。接下来，学生研究如何使用函数符号定义水平轴和垂直轴上的反射。这些想法被扩展为从图形和代数的角度考虑偶函数、奇函数和非偶非奇函数的性质。在研究平移对图表和表格的影响的同时，学生还学习为根据另一个函数定义的函数编写方程，以使用函数符号来描述转换。

课时

1. 匹配数据——让我们描述一下如何转换图表。
2. 移动函数——让我们使用函数符号来表示垂直和水平平移。

3. 更多移动——让我们垂直和水平平移图表以匹配情况。
4. 反映函数——让我们反映一些图表。
5. 一些函数具有对称性——让我们看看函数图中的对称性。
6. 方程中的对称性——让我们使用方程来确定函数是偶数、奇数还是都不是。
7. 用代数表达函数的变换——让我们用代数表达变换后的函数。

B 部分：缩放输出和输入

本节学习目标

- 计算转换函数的输入或输出以适合数据所需的缩放比例。
- 通过函数的加、减、乘、除创建新函数。

本节说明

在本节中，学生将探索变换对改变其形状的函数的影响，包括将函数的输入或输出乘以缩放比例以及组合函数。首先，他们将二次函数拟合到照片中的抛物线拱形，以便在探索将输出乘以缩放比例的效果时更好地理解如何“挤压”或“拉伸”输出。接下来，学生在探索将函数输入与缩放比例相乘时，将不同摩天轮上的乘客的高度随时间的变化视为比例因子的另一种应用。当学生理解不同尺度因素的影响时，强调使用清晰准确的语言。最后，学生使用加法、减法、乘法和除法组合函数来创建新函数。

课时

1. 缩放输出——让我们拉伸和压缩一些图表。
2. 缩放输入——让我们以不同的方式使用缩放因子。
3. 组合函数——让我们使用其他函数来创建一些新函数。

C 节：函数的转换

本节学习目标

- 给定原始函数和变换，创建函数图。
- 为由特定函数和未知函数 f 转换而来的函数创建方程。

本节说明

在本节中，学生将迄今为止所做的所有转换工作应用于各种函数类型。学生从原始函数进行变换，并为变换后的函数编写方程，检查变换效果如何出现在函数的方程中，变换抛物线，并有机会变换圆。

课时

1. 从原始函数转换——让我们转换一些函数。
2. 转换效果 - 让我们转换一些方程函数。
3. 变换抛物线——让我们看看抛物线的变换。
4. 变换圆圈（可选） - 让我们变换一些圆圈。

D 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 为数据建立模型——让我们用函数来建模。

单元 7：三角函数

单元学习目标

学生通过将直角三角形比扩展到单位圆来构建三角函数，将余弦、正弦和正切定义为实数上的函数，并应用周期函数的变换来模拟圆形和周期性情况。

单元说明

在本单元中，向学生介绍三角函数。本单元直接建立在前一个单元的基础上，让学生将变换知识应用于三角函数，并使用这些函数来模拟周期性情况。该单元从对单位圆的深入研究开始，学生在熟悉的环境中研究圆周运动。然后，学生使用勾股定理和直角三角三角函数来确定圆上点的坐标。他们利用圆和直角三角形的相似性来推广到单位圆，重点关注这样一个重要事实：当斜边有单位长度时，边的长度可以用余弦和正弦来表示。然后学生过渡到将余弦和正弦视为函数。他们使用单位圆来绘制余弦和正弦图，然后将域扩展到所有实数，因为他们学习了大于 2π 且小于 0 的弧度角的含义。学生还可以推理不存在正切函数的输入值以及输出值如何定期重复，从而得出正切函数的周期性。接下来，学生在识别周期函数的重要特征（包括中线、振幅和周期）时，将之前的工作成果应用到三角函数的图形转换上。他们通过代数和图形方式对周期性或近似周期性情况进行建模来应用本单元的工作。学生在单元中创建自己的单元圆展示。该显示旨在为整个单元的学生提供参考工具，帮助他们从以直角三角形为重点的三角学理解过渡到将余弦、正弦和正切视为具有自己的输入和输出的函数。

A 部分：单位圆

本节学习目标

- 使用正弦和余弦查找圆上所有四个象限中的点的坐标。
- 给定起始值 1 和角度的象限，使用毕达哥拉斯恒等式确定所有三个三角函数比的值。

本节说明

本节在相似三角形和三角比的基础上介绍单位圆。学生先研究输出值重复出现的情境，并在整个部分中借助圆周运动理解周期函数与单位圆。随后，学生用勾股定理，把直角三角形的直角边与圆上点的坐标联系起来。接下来两课研究单位圆，并延续此前的知识：把一个角的弧度数定义为所经过弧长与圆半径的比。学生制作单位圆参考图，利用对称性确定单位圆上的角的弧度数和点的坐标，再把直角三角形中的三角比与圆上的点联系起来，用两课学习三角恒等式。最后，他们在具体情境中用含有三角比的式子表示不同圆上的点。这是从三角比走向把余弦和正弦理解为函数的重要过渡。

课时

1. 绕圈移动——让我们考虑一下绕圈移动。
2. 重温直角三角形——让我们回顾并运用一些我们所知道的关于直角三角形的知识。
3. 单位圆（1 部分）——让我们了解一下单位圆。
4. 单位圆（2 部分）——让我们看看单位圆上的角度和点。
5. 毕达哥拉斯恒等式（1 部分）——让我们了解更多关于余弦和正弦的知识。
6. 毕达哥拉斯恒等式（2 部分）——让我们使用毕达哥拉斯恒等式。
7. 在圆上查找未知的 坐标 — 让我们在圆上查找 坐标。

第 B 节：周期函数

本节学习目标

- 比较和对比余弦、正弦和正切函数的特征。
- 解释 0 和 2π 之间的输入值、大于 2π 的值以及小于 0 的值的余弦和正弦图。

本节说明

本节将正弦、余弦和正切作为三角函数展开。这是建立在之前课程的工作基础上的，在该课程中，学生使用直角三角形处理正弦、余弦和正切比，然后在上一节中，学生使用涉及正弦和余弦的表达式来定位圆上的点。首先，学生检查涉及重复行为的函数图，从而得出周期函数的定义。接下来，学生开始绘制正弦和余弦函数的点，从 0 到 2π 弧度的输入开始。然后，学生将这项工作扩展到大于 2π 弧度的值，无论是上下文还是抽象。然后，学生考虑负弧度值的输入。他们根据上下文理解这些负输入，然后在现在扩展的域中创建余弦和正弦图。最后，学生利用对三角函数比、单位圆以及对正弦和余弦函数的理解，理解正切函数。本节的最后一课是对正割、余割和余切三角函数的可选探索。

课时

1. 上升和下降——让我们研究重复的图表。
2. 三角函数简介——让我们画出余弦和正弦的图形。
3. 超越 2π — 让我们扩展对三角函数的理解。
4. 扩展三角函数的域——让我们考虑一下所有类型输入的余弦和正弦值。
5. 切线——让我们了解更多关于切线的知识。
6. 一些新的 比（可选）- 让我们探索更多三角函数的图形。

C 节：三角变换

本节学习目标

- 创建三角函数来模拟圆周运动，并给出描述。
- 识别以图形方式和 方程 呈现的三角函数中的中线、振幅和周期。

本节说明

本节重点介绍三角函数的变换。学生在之前的单元中学习函数的一般变换时，以及在之前的课程中研究二次方程及其图时，已经看到了平移和比例因子对图的影响。首先，根据之前使用缩放比例或函数图的垂直拉伸的工作，向学生介绍周期函数的振幅。学生还研究周期函数中线的新特征。他们继续这项工作，将变化的幅度和中线结合在同一周期函数中，因为它们与垂直拉伸和垂直平移有关。学生还考虑水平平移对方程和函数图形的影响。接下来，学生检查水平缩放比例如何影响函数的周期。在两节课中，他们使用图形和方程将所有这些转换放在一起，以识别和确定三角函数的参数和特征，包括中线、幅度和周期。学生以他们在早期单元和课程中的工作为基础，将这些变换概括为周期函数的参数。他们以使用周期函数对圆周运动进行建模来结束本节。

课时

1. 振幅和中线 - 让我们变换三角函数的图形。
2. 变换三角函数——让我们对三角函数的图形进行大量更改。
3. 三角函数图的特征（1 部分）——我们来比较一下三角函数的图和方程。
4. 三角函数图的特征（2 部分）——让我们探索一个对情况进行建模的三角函数。
5. 比较变换——让我们提出问题来找出三角函数的变换。
6. 圆周运动建模——让我们使用三角函数来模拟圆周运动。

D 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 超越圆圈——让我们使用三角函数来建模数据。

单元 8：统计推论

单元学习目标

学生检查研究类型和随机化的作用，用正态曲线对钟形分布进行建模，用误差幅度量化抽样变异性，并分析实验数据以评估观察到的效果是否具有统计显著性。

单元说明

本单元重点介绍随机化在统计学中的一些重要用途。最初，学生将三种类型的研究（实验、观察和调查）视为收集数据的方式。在每种形式的研究中，随机选择参与者并分配到任何亚组对于能够将研究结果推广到更大的人群非常重要。学生们注意到，根据样本数据估计总体的比例或算术平均数会存在一些可变性，因为不同的样本可能会导致不同的估计。这可以通过包含误差幅度以及给定的任何点估计来表达。接下来，学生检查正态分布作为钟形分布的常见模型。借助技术，学生可以使用正态分布模型来近似计算一定区间内的数据比例。这提供了一种量化学生对人口比例或平均值的估计的信心的方法。它还提供了一种方法来检查实验研究的数据是否有足够的证据来得出结论：对照组和治疗组之间的均值差异是由治疗引起的。该单元以学生可以一起完成的实验研究结束，从研究设计到数据收集和分析。然后学生根据分析得出实验结论。

A 部分：研究类型

本节学习目标

- 了解实验研究、观察研究和调查中随机性的目的。

本节说明

在本节中，学生将研究三种研究类型：实验、观察和调查。学生将研究描述归类为三种类型之一，并注意到研究设计的某些方面使他们能够更好地解决感兴趣的问题。良好的研究设计的主要方面之一是在研究参与者的选择中纳入随机性。

课时

- 持怀疑态度——让我们看看人们使用统计数据的一些方式。
- 研究类型——让我们来看看不同类型的研究。
- 群体中的随机性——让我们探讨为什么随机性在研究中很重要。

B 节：分布

本节学习目标

- 使用正态分布模型来估计某个区间内数据的比例。

本节说明

在本节中，学生将重点关注作为钟形分布模型的正态分布。通过使用此模型和技术（或值表），学生可以估算数据的比例

来自一定区间内的分布。当学生量化总体特征估计的预期置信度时，该技术将在后面的部分中 useful。本节的第一课是对一些统计度量（例如平均值和 标准差）以及分布描述的选择性回顾，帮助学生认识适合正态分布模型的分布。

课时

1. 描述分布（可选）——让我们记住 标准差 的含义并讨论分布。
2. 正态分布——让我们研究一种称为“正态分布”的特定类型的分布。
3. 直方图中的几何区域 - 让我们找到特定间隔内的数据比例。
4. 正态曲线下的面积 - 让我们使用正态分布来估计数据的比例。

C 部分：并非所有样本都相同

本节学习目标

- 使用样本数据来确定总体特征的点估计并估计相关的误差范围。

本节说明

在本节中，学生将了解样本可用于估计总体特征，以及如何根据不同样本会导致不同估计值的事实进行调整。首先，学生认识到处理真实数据通常意味着要处理一定程度的变化。例如，如果随机样本表明一半人口具有某种特征，那么如果它实际上更接近具有该特征的 52%，则可能不足为奇。不过，如果 80% 的人这样做，可能会令人惊讶。向学生介绍误差幅度的概念，该误差幅度可以附加到点估计上，以指示基于样本信息不会令人惊讶的一系列值。然后，学生练习使用样本估计总体的比例或平均值，并根据模拟样本的变异性包括点估计的误差幅度。

课时

1. 并不总是理想——让我们看看数据与预期的吻合程度如何。
2. 样本的变异性——让我们探讨一下样本有何不同。
3. 从样本中估计比例——让我们用一些数据来估计总体比例。
4. 估计总体平均值——让我们使用样本数据来估计总体平均值。

D 部分：分析实验数据

本节学习目标

- 使用将实验数据重新分配到组中的结果来确定原始平均值差异是否显著。

本节说明

在本节中，学生检查实验研究中两组之间的均值差异，并确定是否有足够的证据来确定差异是否可能是由于治疗造成的。给定实验中两组的数据，学生创建一个随机分布，并使用他们对正态分布的了解来识别观察到的均值差异何时会发生变化。

如果治疗没有效果，并且因此，当定义组的治疗可能对响应变量造成一些影响时，则为异常。最后，学生有机会设计自己的实验研究、收集数据并分析数据以得出实验结论。关于本节语言的注释：分析是在实验处理没有效果的假设下进行的。这意味着从分析中得出的任何结论要么支持该假设，要么不支持该假设。

课时

1. 实验——让我们做一个实验。
2. 使用正态分布进行实验分析 - 让我们确定实验结果何时显著。
3. 对实验提出质疑——让我们提出正确的问题来分析实验数据。

E 部分：让我们付诸实践

本节说明

在最后一部分中，学生有机会在整个单元中应用他们的想法。由于这是一个简短的部分，后面是单元结束评估，因此没有部分目标或检查点问题。

课时

1. 心率——让我们收集和分析数据。

关于本课程大纲

本课程大纲根据 accessim.org 上公开的 Illustrative Mathematics 9-12 AGA v.360 课程编制而成。单元和章节的叙述、目标和课程标题均来自教师的观点。可选课程标记为“（可选）”。源课程中引用了评估（检查点和单元结束评估），但需要 Kendall Hunt 教育者帐户才能查看；它们不包括在这里。

<https://accessim.org/9-12-aga/algebra-2?a=teacher>