

几何·单位8·评估指南

条件概率

家长或教师指南——观察要点

单位 8 是唯一与几何本身无关的单位。主要思想： $P(A|B)$ 与 $P(B|A)$ 不同，“独立事件”是一个精确的数学条件，而不仅仅是直觉。检查学生是否正确理解了条件符号以及他们是否正确应用了乘法规则。

问题 1 - 旋转器和模具样本空间

- 样本空间： $8 \times 6 = 48$ 原始结果； $3 \times 6 = 18$ 不同的颜色芯片对。
- $P(\text{红色且数字为 } 6) = (3/8)(1/6) = 3/48 = 1/16$ 。
- $P(\text{黄色且为偶数}) = (2/8)(3/6) = 6/48 = 1/8$ 。
- 两个独立的事件（旋转器和骰子）意味着概率相乘。

问题 2 — 具有加法规则的牌概率

- (a) $13/52 = 1/4$ 。
- (b) $12/52 = 3/13$ 。（3 人头牌 $\times$ 4 花色 = 12。）
- (c) $3/52$ 。（红心 J、Q、K。）
- (d) $13/52 + 12/52 - 3/52 = 22/52 = 11/26$ 。
- 加法规则减去重叠。忘记重叠部分的学生会得到错误的答案。
- 优秀的学生绘制维恩图来查看重叠部分。

问题 3 — 双向表条件

- $P(\text{数学}) = 70/200 = 0.35$ 。
- $P(9\text{th}) = 75/200 = 0.375$ 。
- $P(\text{数学且 } 9 \text{ 年级}) = 30/200 = 0.15$ 。
- $P(\text{数学} | 9 \text{ 年级}) = 0.15 / 0.375 = 0.40$ 。（或直接： $30/75 = 0.40$ 。）
- $P(9 \text{ 年级} | \text{数学}) = 0.15 / 0.35 \approx 0.4286$ 。（或： $30/70$ 。）
- 诊断： $P(A | B)$ 不是 $P(B | A)$ 。优秀的学生计算两者并发现它们是不同的。
- 常见错误：除以 200 而不是条件子集（75 或 70）。

问题 4 — 问题 3 的独立性测试

- $P(\text{数学}) \cdot P(9 \text{ 年级}) = 0.35 \cdot 0.375 = 0.131$ 。
- $P(\text{数学且 } 9 \text{ 年级}) = 0.15$ 。
- 0.131 不是 0.15，因此它们不是独立的——在 9 年级略微增加了喜欢数学的机会。
- 对于完全独立性， $P(\text{数学} | 9 \text{ 年级})$ 将等于 $P(\text{数学})$ 。目前 $P(\text{数学} | 9 \text{ 年级}) = 0.40$ 与 $P(\text{数学}) = 0.35$ 。
- 诊断：学生是否认识到“几乎相等”不足以独立——公式必须准确成立。

问题 5 — 抛硬币

- 独立：是的，因为每次翻转不会影响其他翻转。
- $P(\text{全是正面}) = (1/2)$ 的立方 = $1/8$ 。
- $P(\text{没有正面}) = (1/2)$ 的立方 = $1/8$ 。所以 $P(\text{至少 } 1 \text{ 个 } H) = 1 - 1/8 = 7/8$ 。

- “至少一个”技巧（使用补语）是一种常见技巧——看看学生是否会使用它或尝试列举。

问题 6 — 无需更换

- (a) $5/12$.
- (b) $4/11$ （红色少一，总数少一）。
- (c) $(5/12)(4/11) = 20/132 = 5/33$.
 - 为什么不独立：绘制第一个弹珠将其从袋子中取出，改变成分。P(第二个为红色) 取决于首先绘制的内容。
 - 强：明确提到“第二个概率具有不同的分母”。

问题 7 — 维恩图

- 仅限运动： $18 - 8 = 10$ 。仅音乐： $14 - 8 = 6$ 。两者：8。两者都不是： $30 - (10 + 6 + 8) = 6$ 。
- 运动而非音乐：10。
- 两者都不是：6。
- $P(\text{音乐} \mid \text{体育}) = 8/18 = 4/9$ 。
- 观察学生是否正确减去重叠部分；许多重复计算。

问题 8 — 安德烈赌徒谬误

- 安德烈错了。
- $P(\text{下次掷出 } 6) = 1/6$ ，一如既往。过去的掷骰不会影响未来的独立事件。
- 这是“赌徒谬误”。
- 误解的典型例子。优秀的学生提到“每卷都是独立的”，因此之前的结果无关紧要。

问题 9 — 条件表示法

- 麦是正确的。
- $P(A \mid B)$ = ‘给定B的概率’（B是条件，A是您正在计算的值）。
- Diego 混淆了A和B。
- 诊断学生是否正确阅读符号。

问题 10 — 贝叶斯测试问题

- 构建1000 人员表：20 有疾病（2 占1000 的百分比），980 无疾病。
- 患病的 20 人中：19 人检测为阳性（灵敏度 0.95），1 人假阴性。
- 980 不含：98 误报(0.10)、882 真阴性。
- 积极总数： $19 + 98 = 117$ 。
- $P(\text{患病} \mid \text{检测阳性}) = 19 / 117 \approx 0.162 = 16.2$ 百分比。
- 低得惊人！由于这种疾病很罕见，而且检测也不完美，所以大多数阳性结果都是假阳性。这就是著名的“基本利率谬误”。
- 这很难。能力强的学生正确摆桌子；成绩较差的学生尝试直接使用条件公式而错过了基本率。

问题 11 — 学生设计的实验

- 寻找：明确的问题；定义明确的样本空间；正确识别独立性（或缺乏独立性）；使用正确工具（乘法、加法、条件）的计算。
- 强：他们实际进行的实验（e.g.、骰子、纸牌、抛硬币）具有理论概率和经验概率。
- 弱：问题含糊；实际上并没有计算任何东西；使用不正确的公式。

—结束—