

几何·单位5·评估指南

立体几何

家长或教师指南——观察要点

单元 5 主要是关于 体积 公式和缩放。关键的概念跳跃：卡瓦列里原理（斜实体与具有相同底/高的直实体具有相同的 体积），以及 k/k 平方/ k 立方缩放模式。注意公式中的程序错误与概念上的差距。

问题 1 — 旋转固体

- (a) 圆柱体（正圆柱体）。
- (b) 直圆锥。
- (c) 球体。
- 这是“空间可视化”检查。得到(a)和(c)但没有得到(b)的学生常常想象错误的轴。

问题 2 — 立方体横截面

- (a) 与面全等的正方形。
- (b) 正六边形。（垂直于穿过立方体中心的长对角线进行切片。）
- (c) 是——五边形横截面是可能的（对立方体进行切片，使平面与其面的5 相交）。
- 能力强的学生可以画出五边形或六边形横截面。这是一个空间难题；大多数学生会对五边形说“不”——但这是可能的（切片夹住一个角）。

问题 3 — 按 3 缩放的盒子

- 新尺寸：12 x 18 x 30。
- 原始SA：2(24 + 40 + 60) = 248 平方缩放SA = 248 · 9 = 2232 平方比 9 = 3 平方。
- 原装V = 240 立方体。比例V = 240 · 27 = 6480立方体。比率 27 = 3 的立方。
- 为什么：表面积是2 D（每个线性尺寸x 3，因此面积 x 3 · 3 = 9）。体积是 3 D (x 3 · 3 · 3 = 27)。
- 弱：仅记住规则。强：解释使用单位（平方英寸与立方英寸）。

问题 4 — 相似瓶子

- 体积比8 表示 $8 = 2$ 的线性比立方根。
- 较大的瓶子高度= 12 · 2 = 24 cm。
- 较大标签面积= 30 · 2 平方= 120 cm 平方。
- 诊断是学生是否从体积比 开始，并通过立方根向后推算线性比。

问题 5 — 圆锥体、圆柱体、球体

- (a) 圆柱体V = $\pi \cdot 25 \cdot 12 = 300\pi \approx 942.5$ cm 的立方。
- (b) 圆锥V = $(1/3) \cdot \pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314.2$ cm 的立方。
- (c) 球体V = $(4/3) \cdot \pi \cdot 125 = 500\pi/3 \approx 523.6$ cm 的立方。
- 由于圆锥公式中的1/3，比率圆锥: 圆柱= 1:3。
- “为什么是1/3”问题：它来自Cavalieri + 3 全等三棱锥组合在一起形成三棱柱的事实（该单位的推导）。

问题 6 — 斜圆柱

- 使用垂直高度(12)，而不是倾斜高度。 $V = \pi \cdot 16 \cdot 12 = 192 \pi \approx 603.2$ 。
- Cavalieri 原理表明，体积 仅取决于横截面 面积（每层的 πr^2 平方）和垂直高度 - 而不取决于倾斜度。
- 常见错误：学生使用15，因为它是“圆柱体的高度”。诊断是他们是否认识到倾斜 $\neq$ 高度。

问题 7 — 卡瓦列里原理

- 陈述：“如果两个实体具有相同的高度，并且在每一层的横截面都具有相同的面积，则这两个实体具有相同的体积。”
- 应用：具有相同垂直高度的全等圆形底面的直立圆柱体和斜圆柱体在每一层都具有相同的圆形横截面。所以体积相等。
- 弱：“卡瓦列里说数量相等”——毫无原则的重述。
- 强：明确表达“在每个高度都相同的面积”。

问题 8 — 铁球质量

- 体积 = $(4/3) \cdot \pi \cdot 216 = 288 \pi \approx 904.8 \text{ cm}^3$ 的立方。
- 质量 = $904.8 \cdot 7.87 \approx 7121 \text{ g} \approx 7.12 \text{ kg}$ 。
- 将几何与密度/物理联系起来。一个“实际”问题。
- 注意单位混淆： $\text{cm}^3 \times \text{g/cm}^3 = \text{g}$ ，而不是 kg。

问题 9 — 蛋卷冰淇淋

- 半球 $V = (1/2) \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot 27 = 18 \pi \approx 56.5 \text{ cm}^3$ 的立方。
- 圆锥 $V = (1/3) \cdot \pi \cdot 9 \cdot 12 = 36 \pi \approx 113.1 \text{ cm}^3$ 的立方。
- 圆锥体的面积是半球的两倍多——有足够的空间。
- 建模成功标准：清晰的设置、正确计算的两个体积、合理的比较。
- 能力强的学生注意到，对于高度为 $4r$ 的圆锥体，该圆锥体所容纳的半球正好是相同半径 的两倍。

问题 10 — 安德烈的坦克索赔

- 错误。将所有尺寸加倍是将体积乘以 $2^3 = 8$ ，而不是 2。
- 该单元的大创意。没有意识到这一点的学生还没有内化 k^3 立方缩放。
- 强：给出具体示例（ $1 \times 1 \times 1$ 立方体与 $2 \times 2 \times 2$ 立方体；1 与 8 立方体单位）。

问题 11 — 两个圆锥体，体积相同

- $V_A = (1/3) \cdot \pi \cdot 16 \cdot h_A$. $V_B = (1/3) \cdot \pi \cdot 4 \cdot h_B$.
- 相等： $16 \cdot h_A = 4 \cdot h_B$ ，因此 $h_B = 4 \cdot h_A$ 。圆锥体 B（较小半径）的高度必须是 4 倍。
- 直觉：锥体 B 较窄，因此必须更高以进行补偿。
- 能力强的学生注意到：将半径 减半需要 4 乘以高度以保持体积 恒定——半径 在公式中输入平方。