

几何·单位3·评估指南

相似

家长或教师指南——观察要点

单位3是相似的。最大的陷阱是将相似的三角形视为全等——保持概念上的区别清晰是评估的主要目标。观察学生如何使用比例并注意 面积/长度混淆。

问题 1 — 点的 位似变换

- (a) (8, 12)。 (b) (2, 3)。 (c) (-4, -6) — 通过原点的负 缩放比例 通过原点反射。
- (a)、(b)、(c) 均不保留距离（距离按 $|k|$ 缩放；仅 $k = 1$ 或 $k = -1$ 保留长度）。
- 能力强的学生注意到 $k = -1$ 是刚性的（它是180 度数的旋转），但 $k = 2$ 和 $k = 1/2$ 不是刚性的。一个说“没有”的学生可能仍然是对的，因为一个微妙的原因——促使他们清楚地表达出来。

问题 2 — 扩大三角形

- $A'(0,0)$ 、 $B'(12,0)$ 、 $C'(0,9)$ 。原始 周长 $3+4+5=12$ ，图像 周长 $9+12+15=36$ 。比 3 ($=k$) 。
- 原始面积= 6。图像面积=54。比率 9 ($=k$ 平方) 。
- “为什么”就是诊断：面积 是二维的，因此每个线性维度按 k 缩放，给出 $k \cdot k = k^2$ 的平方为 面积。
- 体积缩放将以单位5（实体几何）重新出现。

问题 3 — 相似与全等

- (a) 两个方块：相似（总是）；仅当双方匹配时才全等。
- (b) 两个等边三角形：相似（总是）；仅当双方匹配时才全等。
- (c) 两个长方形：不一定相似，也不一定全等；例如 1×2 和 1×3 不相似。
- (d) 边长相同的正六边形：两者（全等且极其相似）。
- (e) 具有30 度角的两个直角三角形：相似（它们共享两个角：90 和30，因此第三个必须是60）。
- (c) 是诊断：学生经常认为“相同形状类别= 相似”，但具有不同长宽比比 的矩形并不相似。

问题 4 — AA 相似度

- 相似：是，按AA（两对全等角）。
- 全等：不一定— 边可以是任何匹配的比例。
- 使用的定理：角度-角度相似度(AA)。
- 理解扎实的学生会明确指出：“相似，但不一定全等——我们没有边长信息。”理解薄弱的学生会混淆这两个概念。

问题 5 — 使用已知比率

- 缩放比例 $= DE/AB = 9/6 = 1.5$ 。
- $DF = 1.5 \times 10 = 15$ 。 $EF = 1.5 \times 8 = 12$ 。
- 角度 $D = 36$ 度，因为相似的三角形具有全等的相应角度。
- 仔细观察信件：匹配错误边的学生（e.g., DE/AC ）会得到错误的答案 - 标记此。

问题 6 — 间接测量（旗杆）

- 比例： $6/4 = h/22$ 。所以 $h = 6 \cdot 22/4 = 33$ 脚。
- “为什么”问题是诊断问题。太阳光线平行意味着两者的仰角相同，因此两个三角形有一个角度（直角，垂直/地面）和另一个角度（太阳角）全等 - AA 相似性。
- 弱：“它们是成比例的”，没有理由。

问题 7 — 直角三角形的高度/毕达哥拉斯证明

- 所有三个三角形共享直角（90 度），每个较小的三角形与较大的三角形共享一个锐角 - 因此根据 AA，所有三个三角形都是相似的。
- 从相似于 ACD 的三角形 ABC： $AB/AC = AC/AD$ ，因此 $AC^2 = AB \cdot AD$ 。
- 由与 CBD 相似三角形 ABC： $AB/BC = BC/BD$ ，因此 $BC^2 = AB \cdot BD$ 。
- 加法： $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$ 。
- 这是通过相似性证明勾股定理。实力强的学生看到了优雅： $a^2 + b^2 = c^2$ 自然而然地出现了。
- 弱：会做代数但无法阐明为什么 $AC^2 + BC^2 = AB^2$ 是勾股定理的学生。

问题 8 — Han 的面积声明

- 韩错了。面积具有边长正方形的比，而不是边长的比。
- 示例：2 x 2 正方形有面积 4；6 x 6 方有面积 36。边比 1:3、面积比 $1:9 = 1:3^2$ 。
- 常见的混淆（链接到问题2）。

问题 9 — Mai 的相似性声明

- 正确：各边成比例 ($6:9 = 8:12 = 10:15 = 2:3$)。
- 不正确：她说角度不同——但如果边成比例，则三角形相似（SSS 相似定理），因此角度必须相等。
- 实际关系：这些三角形通过 SSS 相似，为缩放比例 3:2（或 2:3）。
- 这是学生是否理解 SSS 相似性以及更著名的 AA 相似性的诊断问题。

问题 10 — 放大照片

- 新尺寸： $4 \cdot 2.5 = 10$ 英寸乘 $6 \cdot 2.5 = 15$ 英寸。
- 墨水：面积按 2.5 平方 = 6.25 缩放，因此墨水 = $12 \cdot 6.25 = 75$ 平方英寸。
- 体积：按 2.5 立方 = 15.625 缩放。
- 在所有三个维度上测试 k、k 平方、k 立方图案。单元 5 的关键设置。

问题 11 — 中段定理

- 令 D 和 E 为三角形 ABC 的边 AB 和 AC 的中点。然后三角形 ADE 通过 SAS 相似度与三角形 ABC 相似（与缩放比例 1/2）： $AD/AB = 1/2$ ， $AE/AC = 1/2$ ，并且共享角 A。
- 因此 $DE/BC = 1/2$ ，得出 $DE = (1/2)BC$ 。D 和 E 处的角度对应于 B 和 C 处的角度，因此通过相应的角度，DE 平行于 BC。
- 优秀的学生认为这是“从顶点 A 缩小三角形 1/2”。能力较弱的学生试图使用全等式，但却陷入困境。