

几何·单位2·评估指南

全等

家长或教师指南——观察要点

单元2要求学生证明与特定定理（SSS、SAS、ASA、AAS）的全等性，并确定给出的内容与必须显示的内容。寻找清晰的推理，而不仅仅是“看起来全等”的图片。

问题1 — CPCTC 排序

- 侧面： $AB \cong DE$ 、 $BC \cong EF$ 、 $AC \cong DF$ 。
- 角度：角度A $\cong$ 角度D、角度B $\cong$ 角度E、角度C $\cong$ 角度F。
- 顶点排列顺序是诊断重点。若三角形 $ABC \cong$ 与三角形 DEF 按顶点顺序对应，改成三角形 $ABC \cong$ 与三角形 EDF 就意味着 $A \leftrightarrow E$ 、 $B \leftrightarrow D$ ，通常是错误的。较好的答案会举例说明：顶点对应关系决定哪些边和角相等。
- 弱：“我们总是必须遵守命令”——确实如此，但没有解释。

问题2 — 适用哪个假设

- (a) SAS。 (b) SSS。 (c) ASA。 (d) 还不够——AAA 给出了相似性，但不给出全等性。 (e) SSA — 不是全等判定公理（不明确的情况）。
- 部分(d)和(e)是诊断：将“AAA”写为全等判定公理的学生将相似的三角形与全等的单个单位混淆了——这正是该单位旨在防止的混淆。

问题3 — 三角形 $ACM \cong BCM$

- 严密证明：1) $AM \cong BM$ （已知M是中点）。2) 角 $AMC \cong$ 角 BMC （都是直角，因为 $CM \perp AB$ ）。3) $CM \cong CM$ （公共边 / 自反性）。4) 由 SAS，三角形 $ACM \cong$ 三角形 BCM 。
- 自反属性（ $CM \cong CM$ ）是一个常见的遗漏。如果没有它，学生就没有三项信息，因此 SAS 无法申请。
- 弱：“它们看起来全等，因为它们有一条公共边”——没有引用任何假设。

问题4 — 平行四边形对角线证明

- 强有力的证明：平行于CD的AB给出角 $BAC \cong$ 角 DCA （交替内角，横向AC）。同样角度 $BCA \cong$ 角度 DAC 。然后 $AC \cong AC$ （反身）。由ASA，三角形 $ABC \cong$ 三角形 CDA 。
- 诊断是学生是否正确识别哪些角是内角与横角交替的。许多学生在说“替代内部”时没有具体说明横向——促使他们说得更明确。
- 弱：仅陈述“对边相等”而不证明它（这将是循环）。

问题5 — 垂直平分线定理

- (a) 轮廓：在垂直平分线上取一点P。三角形 $PAM \cong$ SAS 的三角形 PBM （PM 共享；直角相等； $AM = BM$ 根据平分线的定义）。所以 $PA = PB$ 。
- (b) 求AB的垂直平分线，然后求BC的垂直平分线。它们的交点是外心——与所有三个城镇的距离相等。
- 这是一个“将定理与上下文联系起来”的问题。实力强的学生给予施工；成绩较差的学生只需说“把它放在中间”。

问题6 — 平行四边形对角线互相平分

- 强有力的证明：使用ASA上一题的结果（三角形 $ABE \cong$ 三角形 CDE ）：角 $BAE \cong$ 角 DCE （交替内角）、 $AB \cong CD$ （平行四边形的对边）、角 $ABE \cong$ 角 CDE （交替内角）。因此 CPCTC 的 $AE \cong CE$ 和 $BE \cong DE$ 。

- 诊断：他们是否使用先前有关对边全等的定理，或尝试从头开始证明？以先验定理为基础是该单元的主要证明技能。

问题 7 — 四边形 T/F

- (a) F — 菱形有四个全等的边，但不一定是正方形。反例：角度为 60/120 的菱形。
- (b) T — 对边全等意味着平行四边形。
- (c) F — 等腰梯形具有全等的对角线，但不是矩形。
- 这是一个“区分相关定理”问题。实力强的同学给出反例；弱学生只说T/F，没有支持。

问题 8 — Lin 的 SSA 错误

- 林错了。该角度位于 A 和 D 处，但不包含在两个给定边（AB 和 BC）之间。这是 SSA，而不是 SAS，并且 SSA 不保证全等性（不明确的情况）。

- E 部分的诊断问题。标记“角 A 不在 AB 和 BC 之间”的学生已经掌握了夹角的微妙之处。

- 一个很好的反例显示了具有相同SSA数据的两个不同三角形。

问题 9 — 迭戈的共享面

- 迭戈是正确的。 $AC \cong AD$ （给定）、角度 $CAB \cong$ 角度 DAB （给定）、 $AB \cong AB$ （自反/共享）。共享的边很重要，因为自反属性：边与其自身全等。

- 许多学生将共享方斥为“作弊”——评估他们是否理解自反性质是合法的证明步骤。

- 弱：认为证明是错误的，因为“它们共享这一面，所以你不能使用它两次”——根本性的误解。

问题 10 — 等腰三角形底角

- 标准证明：从顶点 A 向底边 BC 作垂线，垂足为 M。 $AB \cong AC$ （已知）， $AM \cong AM$ （自反性）， $AM \perp BC$ 形成两个直角。由 HL，三角形 $ABM \cong$ 三角形 ACM （或用含直角的 SAS）。因此由 CPCTC，角 B $\cong$ 角 C。

- 替代方案：使用A处的角平分线而不是高度—直接给出SAS。

- 优秀的学生注意到这是他们在单元1中所做的构造的使用（从一点垂直）。

问题 11 — 菱形对角线猜想

- 猜想应包括：对角线互相垂直；对角线互相平分；对角线平分顶角。其中任何一个都是一个强有力的答案。

- 轮廓：使用三角形全等（对角线形成的四个小三角形均由SSS或SAS全等）。然后 CPCTC 给出垂直度（交点处的相邻角度总和为 180 度并且全等 $\rightarrow$ 每个都是 90 度）。

- 弱：陈述猜想，但无法给出证明——他们只记住了结果，却没有内化原因。