

几何·单位1·评估指南

构造和刚性变换

家长或教师指南——观察要点

1单元是基础：语言的精确性，“严格”的含义，以及校对写作的首次介绍。寻找证据让学生知道建筑为何有效，而不仅仅是如何建造。

问题 1 — 词汇

- 垂直平分线：必须包括“垂直于”和“穿过中点”。
- 刚性变换：必须提及保持距离（最好是角度）。学生说“不改变形状”很接近，但不精确——让他们说出保留的内容。
- 全等图形：IM 的正式定义是“一个可以通过一系列严格的变换映射到另一个”。接受“相同的大小和形状”，但对其进行标记 - 在单元 1 末尾，基于转换的定义是目标。
- 弱信号：任何依赖于测量的定义（“用尺子检查”）。

问题 2 — 垂直平分线构造

- 步骤必须指定：(a) 以 A 为中心的圆/弧，其中半径 r 至少为 AB 的一半，(b) 以 B 为中心的相同半径圆/弧，(c) 连接两个交点。
- 诊断部分就是理由。两个圆弧交点 P 和 Q 各自满足 $PA = PB = r$ 和 $QA = QB = r$ 。因此两者与 A 和 B 等距，因此都位于 AB 的垂直平分线上。
- 常见的弱答案：“因为我们使用相同的半径”——没有解释等于半径意味着什么（到每个端点的距离相等）。
- 强：明确援引“与端点等距的点位于垂直平分线上”的学生。

问题 3 — 等边三角形构造

- $AC = AB$ ，因为 C 位于以 A 为中心、半径为 AB 的圆上。
- $BC = AB$ ，因为 C 位于以 B 为中心、半径为 AB 的圆上。
- 第三部分是许多学生绊倒的地方：为什么是等边，而不仅仅是等腰？因为所有三边都等于 AB，而不仅仅是两条边。学生应参考等边（所有三边相等）的定义并证明所有三个边的尺寸均为 AB。
- 弱答案：“三角形看起来是等边的”。

问题 4 — 坐标变换

- (a) $(-1, 6)$ 。(b) $(2, -5)$ 。(c) $(-5, 2)$ 。轮换是最容易被忽视的；注意标志是否混乱。
- 接下来是诊断：刚性变换保留距离和角度。学生不应该只是说“形状保持不变”，而应该提到任何两点之间的距离和任何角度的测量都被保留。
- 强：将“刚性”与原像和像的全等性联系起来。

问题 5 — 没有网格的反射

- (a) 是；反射是刚性的，因此要保持距离。
- (b) 是；根据反射的定义，反射线是从任意点到其图像的线段的垂直平分线。
- (c) $C' = C$ ；反射线上的点是固定的。

- (b) 部分是学生是否已经内化了正式的脱离网格的反思定义的诊断。一个学生说“我'm 不确定”仍然只考虑网格移动。

问题 6 — 构造正方形的两种方法

- 大多数学生会给出的方法1：在A和B处构造垂线来分段AB，然后在每条垂线上标出AB的长度。
- 方法2 强替代方法：通过旋转90度来构造圆来定位顶点，或者使用对角线。
- 真实测试：这些方法真的不同，还是只是绘制相同结构的两种方法？两条垂线（每个端点各一条）算作ONE方法；垂直与旋转算作两种方法。
- 效率反映应提及指南针移动或步数。

问题 7 — Tyler 与 Mai（刚性的定义）

- 麦是正确的。位似变换 $\times$ 缩放比例 2 使距离加倍，因此它不是刚性的。
- 斯特朗：泰勒的错误是将“相同形状”（相似性）与“相同大小和形状”（全等性/刚性）混为一谈。学生应该清楚地区分。
- 弱：“泰勒是错误的，因为位似变换并不严格”——重述但没有解释。

问题 8 — 安德烈使用尺子

- 安德烈的结果可能恰好是正确的，但它不是一个有效的圆规和直尺构造。
- 诊断答案：构造是关于圆规/直尺公理的逻辑保证。标尺测量是一个近似值，取决于标尺的精度。根据定义，指南针移动给出的距离相等。
- 弱：“不允许统治者”——重申规则而不解释原则。
- 强：连接到更大的想法，即构造产生精确的相等，支持后来的证明。

问题 9 - 正多边形的对称性

- (a) 等边三角形：3 个轴对称变换 + 3 个旋转变换（包括恒等变换）= 6 个。若学生只计入 2 个非恒等旋转 + 3 个轴对称变换 = 5 个，也可接受；需注明是否计入恒等变换。
- (b) 非正方形矩形：2 反射 + 1 非恒等旋转（180 度）+ 恒等 = 4（Klein 4 群）。
- (c) 正六边形：6 反射 + 6 旋转 = 12 总计。
- 图案：常规 n 边形具有 $2n$ 对称性（ n 旋转 + n 反射）。一个在没有被告知的情况下注意到这一点的学生表现出很强的抽象思维。

问题 10 — 三角角和证明

- 作图：通过C，画一条与AB平行的线。这将在C处通过交替内角创建与角A和B全等的角。
- 叙述应连接：(1) 通过C与AB平行的线；(2) 横向AC和横向BC的交替内角；(3) C处的三个角沿一条直线，总和为180度。
- 常见的弱证明：“我测量了角度，并将它们添加到180中。”测量是证据，而不是证明。
- 强有力的证据读起来就像一个相互关联的论点；弱证明是没有逻辑粘合剂的要点。

问题 11 — 打开 构造（两个圆的菱形）

- 构造：以A为中心经过B画圆1；过A以B为圆心画圆2。两个交点P和Q满足 $AP = AB = AQ = BP = BQ$ 。

- 菱形是APBQ（对角线AB和PQ）。
- 优秀的学生会用与问题2 相同的逻辑来证明：相等的半径给出相等的距离。
- 非常强：他们注意到 $AP = BP = AQ = BQ = AB$ ，因此APBQ 的所有四个边全等——定义为菱形。
- 弱：画出的东西看起来像两个圆圈，但无法阐明为什么会形成菱形。

—结束—