

代数 2 · 单元 7 · 评估指南

三角函数

家长或教师指南——观察要点

单元 7 是关于三角函数的，而不仅仅是比。最具诊断性的时刻是学生是否将正弦/余弦视为单位圆上的点过程的输出，而不是视为记忆的魔法。注意弧度/角度的混淆；这是最常见的错误。

问题 1 — 单位圆精确值

- (a) $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.
- (b) $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.
- (c) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.
- (d) $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
- (e) $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.
- (f) $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$.
- ★单元7流畅度测试。拥有单位圆参考卡并将其用于每个值的学生得满分。能够从特殊直角三角形（30-60-90 和 45-45-90）推导出这些内容的学生表现出更深入的结构理解。

问题 2 — 毕达哥拉斯恒等式应用

- $\sin^2(\theta) = 9/25$, 因此 $\cos^2(\theta) = 16/25$, 因此 $\cos(\theta) = \pm 4/5$ 。
- 第二象限 $\Rightarrow \cos(\theta) < 0$, 因此 $\cos(\theta) = -4/5$ 。
- $\tan(\theta) = (3/5) / (-4/5) = -3/4$.
- ★诊断：他们是否根据象限为 $\cos(\theta)$ 选择正确的符号？一名学生采取只有主根忘记了 $\cos$ 可以为负。

问题 3 — 超出第一个周期

- (a) $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$ （余弦为偶数）。
- (b) $\sin(7\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -1/2$ （象限III，参考角 $\pi/6$ ）。
- (c) $13\pi/4 - 2\pi = 5\pi/4$ （仍然 $> 2\pi$ 否 — 等等， $13\pi/4 = 3.25\pi$ 、减去 $2\pi = 8\pi/4$ 得到 $5\pi/4$ ）。 $\cos(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$.
- (d) 强：“转动一整圈（ 2π ）后，您回到单位圆上的同一点，因此 $\sin$ 和 $\cos$ 重复。”
- ★对称属性（偶数/奇数）从单元 6 — 连接点继承。

问题 4 — 标准 $\sin/\cos$ 图

- 两者的振幅为1，周期为 2π ，中线为 $y = 0$ 。
- $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ 。余弦是正弦左移 $\pi/2$ 。
- ★理解扎实的学生会标出 0 、 $\pi/2$ 、 π 、 $3\pi/2$ 、 2π 处的关键点。理解薄弱的学生只画一般的“波浪线”没有具体的值。

问题 5 — 三角变换

- 幅度：3。
- 周期： $2\pi/2 = \pi$ 。
- 中线： $y = 1$ 。

- 相移：向右 $\pi/4$ 。
- 最大值： $1 + 3 = 4$ 。最小值： $1 - 3 = -2$ 。
- ★注意周期误差： 2π 除以频率(b)得到周期，而不是相乘。大多数常见错误：“句号 $= 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ 。”

问题 6 — 摩天轮模型

- 高度函数（从底部开始）： $h(t) = 25 - 20 \cdot \cos(2\pi \cdot t/30) = 25 - 20 \cdot \cos(\pi t/15)$ 。
- 幅度：20。中线： $y = 25$ 。期间：30。
- 为什么要减去 $\cos$ ？在 $t=0$ ，骑手位于底部（ $h = 5$ ），因此我们需要 $h(0) = 25 - 20 = 5$ 。✓
- $h(10) = 25 - 20 \cdot \cos(2\pi/3) = 25 - 20 \cdot (-1/2) = 25 + 10 = 35$ 脚。
- ★最难的部分：从文字构建模型。大多数学生得到的是振幅和中线；几个通过否定 $\cos$ 正确处理“从底部开始”约束。

问题 7 — 正切渐近线

- $\tan(x)$ 未定义，其中 $\cos(x) = 0$ ： $x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots, -\pi/2, \dots$
- 那里有垂直渐近线，因为除以零 $\rightarrow$ 无界。
- $\tan$ 的周期 $= \pi$ （不是 2π ）。 $\sin$ 和 $\cos$ 都翻转 π 的符号，因此它们的比返回相同的值 - $\tan$ 的周期为一半。
- ★“为什么是 π 而不是 2π ”这个问题，可以区分哪些学生理解 $\sin/\cos$ 表示比，哪些学生记住。

问题 8 — 弧度与度数

- 迭戈在弧度模式的计算器中输入了“30”。 $\sin(30 \text{ rad}) \approx -0.988$ ，因为 30 弧度等于很多整周再加一点。
- 正确：输入 $\sin(\pi/6)$ ，或把计算器切换到角度模式后输入 $\sin(30^\circ)$ 。
- ★最常见的单位 7 错误。学生是否理解这一点的诊断时刻
弧度和度是同一角度的两个不同单位。

问题 9 — Lin 写出的错误恒等式

- $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$ 。 $2 \cdot \sin(\pi/6) = 2 \cdot (1/2) = 1$ 。
- $0.866 \neq 1$ ，所以公式是错误的。
- 正确： $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ （双角度公式 — 通常稍后才会介绍，但通过替换进行测试会发现错误）。
- ★一般教训：正弦不是线性的，因此 $\sin(2x) \neq 2 \cdot \sin(x)$ 。优秀的学生能够清楚地表达出三角函数函数是高度非线性的。

问题 10 — 本质上的三角函数

- ★打开-结束。强有力的答案将周期性现象与三角函数联系起来：
 - 声波：压力呈正弦振荡。
 - 潮汐：由地球/月球旋转驱动（圆周运动 $\rightarrow$ 正弦投影）。
 - 交流电流：电压为 $\sin$ 时间的函数。
 - 行星运动：圆上的位置投影到正弦坐标。
- ★统一属性：任何以恒定速率重复的事物都可以用正弦/余弦建模，因为这正是单位圆所描绘的结果。