

代数 2 · 单元 5 · 评估指南

指数函数和方程

家长或教师指南——观察要点

第 5 单元学习指数函数，并把对数作为求未知指数的逆运算。最关键的诊断点是：学生是否知道 $\log_b(x) = y$ 与 $b^y = x$ 只是同一关系的不同表达。

问题 1 — 细菌生长

- (a) $P(t) = 200 \cdot 3^t$.
- (b) $P(5) = 200 \cdot 243 = 48,600$. $P(8) = 200 \cdot 6561 = 1,312,200$.
- (c) $P(0.5) = 200 \cdot \sqrt{3} \approx 346.4$. ★ 诊断：他们是否接受该函数仍然适用于非整数 t ？早些时候他们可能认为 $3^{0.5}$ 是未定义的。
 - 强：“ $3^{0.5} = \sqrt{3}$ ，因为规则就是这样说的： $3^{(1/2)}$ 是 3 的平方根。”

问题 2 — 年费 $\leftrightarrow$ 月费

- (a) $V(t) = 1000 \cdot 1.08^t$.
- (b) $m = 1.08^{(1/12)} \approx 1.00643$ 。所以每月增长 $\approx 0.643\%$ 。
- (c) ★ 诊断：0.643% 与 $8/12 \approx 0.667\%$ 不同。复合增长是次线性的率——你不只是相除。
 - 强：“除法假定增长相加；指数增长为倍数，因此我们需要 12 的根。”

问题 3 — 没有计算器的日志

- $\log_2(32) = 5$. $\log_2(1) = 0$. $\log_2(1/8) = -3$.
- $\log_{10}(1000) = 3$. $\log_{10}(0.01) = -2$.
- $\log_3(81) = 4$. $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$.
- (d) ★ 定义： $\log_b(x)$ 是您放在 b 上以获得 x 的指数。实力雄厚的学生是这样表述的。
 - 最具有诊断性： $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$ — 没有看到 $\sqrt{5} = 5^{(1/2)}$ 的学生会陷入困境。

问题 4 — 求解指数

- (a) $x = 6$ （自 $2^6 = 64$ 起）。
- (b) $x = \log_3(20) = \log(20)/\log(3) \approx 2.727$.
- (c) $2^t = 20$, $t = \log_2(20) \approx 4.322$.
- (d) $2x + 1 = \log_{10}(500) \approx 2.699$; $x \approx 0.850$.
- ★ 模式：两边取一个 $\log$ ，然后线性求解。无法“看到”何时介绍的学生 $\log$ 卡在装置的中心。

问题 5 — 接近 e

- $(n=100) \approx 2.7048$. $(n=1000) \approx 2.7169$. $(n=1,000,000) \approx 2.71828$.
- 逼近 $e \approx 2.71828\cdots$
- (c) 强：“ e 是连续复合增长的极限。当每时每刻（不仅仅是每个时期）都发生增长时，乘数是 e ，而不是 $(1+r)^{n_0}$ 。”
- ★ 这个问题是离散复利和连续（自然）增长之间的桥梁。

问题 6 — 半衰期建模

- (a) $A(t) = 100 \cdot (1/2)^{t/12}$.
- (b) $25 = 100 \cdot (1/2)^{t/12} \Rightarrow (1/2)^{t/12} = 1/4 = (1/2)^2 \Rightarrow t/12 = 2 \Rightarrow t = 24$ 年。
- (c) $10 = 100 \cdot (1/2)^{t/12} \Rightarrow (1/2)^{t/12} = 0.1 \Rightarrow t/12 = \log_{0.5}(0.1) = \ln(0.1)/\ln(0.5) \approx 3.322 \Rightarrow t \approx 39.86$ 年。
- ★注意：设置 $A(t) = 100 \cdot 0.5^t$ 的学生（忘记按半衰期缩放 t ）。

问题 7 — 两个 log 底座

- 方法1: $\log(4^x) = \log(7) \Rightarrow x \cdot \log(4) = \log(7) \Rightarrow x = \log(7)/\log(4) \approx 1.404$.
- 方法2: $\ln(4^x) = \ln(7) \Rightarrow x \cdot \ln(4) = \ln(7) \Rightarrow x = \ln(7)/\ln(4) \approx 1.404$.
- ★诊断：与改变碱基公式相同的答案。 $\log_a(N)/\log_a(M)$ 是与您选择的碱基无关（在单个除法内）。
- 强：“日志只是计算指数的一种方式；无论基数如何，相对大小都是固定的。”

问题 8 — Diego 的 log 规则错误

- 错误。测试： $\log(10 \cdot 100) = \log(1000) = 3$ 。 $\log(10) \cdot \log(100) = 1 \cdot 2 = 2$ 。不相等。
- 正确规则： $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ — 对数将乘法转为加法。
- ★代数2中最常见的log错误。优秀的学生看到产品的规则是加法，而不是乘法，因为当碱基匹配时，日志是指数和指数相加。

问题 9 — 指数增长与多项式增长

- 正确。任何指数函数 b^x 与 $b > 1$ 最终都会超过任何多项式 $p(x)$ ，无论程度如何。
- 示例： 2^x 与 x^{10} 。对于小 x ， x^{10} 获胜。通过 $x \approx 60$ ， 2^x 已经赶上了。按 $x = 100$ 计算， 2^x 是天文数字。
- ★理解扎实的学生会解释根本原因：指数增长会不断累积，而多项式增长只是投入的力量。只要有足够的 x ，复利总是会获胜。
- 弱：陈述事实但没有举例。

问题 10 — 真实世界日志

- ★打开-结束；强有力的答案将日志与压缩大动态范围联系起来：
- pH：氢离子浓度log；1的pH变化意味着10×差异。
- 里氏震级：地震振幅log；震级 6 比震级 5 强 10×。
- 分贝：log 声功率比。
- ★关键见解：日志让人类可以管理跨多个数量级的数量规模可控。