

代数 2 · 单元 4 · 评估指南

复数和有理指数

家长或教师指南——观察要点

单位 4 在两个方向上扩展数字系统：有理数指数（填补实数中的空白）和复数（扩展到实数之外）。诊断错误集中在：忘记平方根上的 $\pm$ 、错误处理 $i^2 = -1$ 以及将 $\sqrt{-9}$ 视为实数。

问题 1 — 有理指数

- (a) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.
- (b) $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.
- (c) $25^{-1/2} = 1/\sqrt{25} = 1/5$.
- (d) ★优秀：“ $a^{1/n}$ 的意思是，通过 n 求出的数字——恰好是 n 次方根。指数规则强制 $(a^{1/n})^n = a^1 = a$ 。”
- 弱：仅陈述规则而不进行推理。

问题 2 — 平方与平方根

- (a) $x = \pm 7$ （两个解）。
- (b) $x = 49$ （一种解决方案）。
- (c) ★关键检查。理解扎实：“按约定， $\sqrt{x}$ 表示算术平方根（非负平方根），因此 $\sqrt{x} = 7$ 只有一种解。但 $x^2 = 49$ 允许 $+7$ 和 -7 两者，因为两者都与 49 平方。”
- 如果学生说 (a) 只有 $x=7$ ，那么他们又丢失了 $\pm$ ——这是一个经常出现的单元 2/4 问题。

问题 3 - 具有无关解的根式方程

- 平方： $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ 。 $\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ 或 $x = -1$ 。
- 检查 $x = 4$ ： $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1 = 3$ 。✓
- 检查 $x = -1$ ： $\sqrt{4} = 2$ ；但 $x - 1 = -2$ 。所以 $2 \neq -2$ 。外来的。
- ★优秀：“平方将 ‘ $a = b$ ’ 变成 ‘ $a^2 = b^2$ ’，当 $a = -b$ 时这也是正确的。所以我们选择解决方案如果两侧有相反的符号——这些不满足原来的要求。”
- 这与单元 3 外部解决方案的根本原因相同。

问题 4 — i 的幂

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ 。 $i^4 = (i^2)^2 = 1$ 。 $i^5 = i$ 。 $i^6 = i^2 = -1$ 。
- (b) 强：“ $x^2 = -1$ 没有实数解，因此我们发明 i 。一旦 i 存在，所有二次方程都是可解的。”
- (c) i^{50} ： $50 = 4 \cdot 12 + 2$ ，因此 $i^{50} = i^2 = -1$ 。
- ★诊断是他们是否意识到 i 有一个 4 循环： $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$

问题 5 — 复杂算术

- $z + w = 4 - 2i$ 。 $z - w = 2 + 6i$ 。
- $z \cdot w = (3+2i)(1-4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i - 8(-1) = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$ 。
- $z^2 = (3+2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ 。
- ★ $z \cdot w$ 上最常见的错误：忘记 $i^2 = -1$ 并写成 $-8i^2 = -8$ 。复杂的整体点乘法是 i^2 翻转符号。

问题 6 — $x^2 + 4x + 13 = 0$ 的两种方法

- 完成正方形： $(x + 2)^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = -9 \Rightarrow x + 2 = \pm 3i \Rightarrow x = -2 \pm 3i$.
- 二次公式： $x = (-4 \pm \sqrt{(16 - 52)})/2 = (-4 \pm \sqrt{(-36)})/2 = (-4 \pm 6i)/2 = -2 \pm 3i$.
- ★两种方法必须给出相同的答案；这就是交叉检查。一个与众不同的学生答案应该寻找算术错误。

问题 7 — 判别分析

- (a) $D = 36 - 36 = 0$ 。一种真实的（重复的）解决方案： $x = 3$ 。
- (b) $D = 9 + 40 = 49 > 0$ 。两个真正的解决方案。
- (c) $D = 4 - 20 = -16 < 0$ 。两个复杂的解决方案。
- (d) ★强：“二次公式中有 $\sqrt{D}$ ；如果 $D > 0$ 我们得到两个实数值，如果 $D = 0$ 士折叠为 1，如果 $D < 0$ 我们得到一个虚部——两个复共轭解。”
- 这与单元4 单元叙述完美连接。

问题 8 — Han 的 $\sqrt{(-9)}$ 主张

- 韩在多个层面上都是错误的。 $\sqrt{(-9)}$ 根本不是实数；它等于 $3i$ （主复合体平方根）。
- 即使尝试不借助 i 将 $\sqrt{}$ 推广到负数，按约定仍取主值（正虚部）平方根： $3i$ ，而不是 $-3i$ 。
- ★优秀的学生明确表示符号 $\sqrt{}$ 表示一个特定值，即使是负数： $\sqrt{(-9)} = 3i$.

问题 9 — Mai 的无解激进

- 替换 $x = 16$ ： $\sqrt{16} = 4$ ，但方程表示 $\sqrt{x} = -4$ 。由于 $4 \neq -4$ ， $x = 16$ 不是解决方案。
- $\sqrt{x} = -4$ 无解，因为 $\sqrt{x}$ 总是 ≥ 0 （按照惯例）。
- ★这是平方如何引入无关解的最干净的示例：原始的方程无解，但平方后（ $x = 16$ ）似乎凭空产生了一个解。
- 将其连接回问题3 和单元3 无关解决方案。

问题 10 — 共轭积

- $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$.
- ★总是真实的，并且总是非负的。
- (b) 强：“对于相除复数，相乘分子和分母通过分母的共轭。分母变为实数，这就是我们想要的标准形式 $a + bi$ 。”
- 这是高级复杂算术的基础，并且是本单元“逆向工作”可选部分中的内容。