

代数 2 · 单元 3 · 评估指南

有理函数和方程

家长或教师指南——观察要点

单元3是关于有理式结构的。大多数诊断错误隐藏在同一位置：忘记使分母为零的 x 值被排除在域之外。无关的解只是该事实的代数影子。

问题 1 — 基本有理函数 $f(x) = (x+3)/(x-2)$

- 定义域：除 $x = 2$ （分母为零）外的所有实数 x 。
- 垂直渐近线： $x = 2$ 。
- 水平渐近线： $y = 1$ （分子和分母的度数相等；前导系数比 = $1/1$ ）。
- x 截距： $x = -3$ （分子零）。 y -截距： $f(0) = 3/(-2) = -3/2$ 。
- ★(c) 的诊断是他们是否解释了规则：等度分子较小 $\Rightarrow$ HA 为 $y=0$ ；分子较大 $\Rightarrow$ 没有医管局。 $\Rightarrow$ HA 为主导系数之比；

问题 2 - 通过程度比较结束行为

- (a) HA: $y = 2$ （等度；主系数 $4/2$ 之比）。
- (b) HA: $y = 0$ （分子次数小于分母）。
- (c) 无水平渐近线—分子度(3) > 分母度(1)。有一条斜/多项式渐近线。
- ★这是经典的单位 3 规则。大多数学生得到了 (a) 和 (b)，但在 (c) 上失败了。如果说“HA 是无穷大”或“ $y = x^2$ ”（实际的倾斜趋势），接受后者并进行解释。

问题 3 — 孔与垂直渐近线

- $r(x) = (x-2)(x+2)/(x-2)$ 。 $x \neq 2$ 简化为 $r(x) = x + 2$ 。
- 在 $x = 2$ 处有一个空点，而不是垂直渐近线，因为该因式被约去了。
- $r(3) = 5$ 。函数“想要” $x = 2$ （限制）处的值 4，但在那里未定义。
- ★最具诊断性的问题。学生宣称 $x = 2$ 是一条垂直渐近线，没有简化是不假思索地应用规则。优秀的学生总是先分解并取消。

问题 4 — $1/(x-3) = 5/(x+1)$

- 交叉相乘： $x + 1 = 5(x - 3) \Rightarrow x + 1 = 5x - 15 \Rightarrow 16 = 4x \Rightarrow x = 4$ 。
- 检查： $1/(4-3) = 1$ ； $5/(4+1) = 1$ 。✓
- ★ $x = 3$ 和 $x = -1$ 都必须从域中排除。解 $x = 4$ 在域中，所以它是有效的。优秀的学生明确地阐明了这一领域检查。

问题 5 — 无关的解决方案

- 相乘 两侧由 $(x - 2) : x = 2 + (x - 2) \Rightarrow x = x$ 。对于所有 x 来说都是如此！但 $x = 2$ 被排除在外域。
- 实际解决方案集：除 $x = 2$ 之外的所有真实 x 。
- 若学生直接合并得到 $x = 2$ （例如减去 $(x-2)/(x-2)$ 后得到 $0=0$ ），应认识到 $x=2$ 是增根。
- ★这是该单元最深的外部解矩。课程：乘以 $(x - 2)$ 擦除正是这个限制使得该方程与 $x = x$ 不同。

问题 6 — 平均成本

- $A(n) = (5000 + 20n)/n = 5000/n + 20$.
- $A(100) = \$70/\text{项目}$ 。 $A(10,000) = \$20.50/\text{项目}$ 。
- 由于 $n \rightarrow \infty$, $A(n) \rightarrow \$20$ 。水平渐近线 $y = 20$ 。
- 在上下文中：当您生产更多商品时，固定成本会摊薄，但您永远无法将平均成本降低到低于 \$20 的每件商品成本。
- ★优秀的学生将渐近线 $y = 20$ 明确连接到变量 “\$20” 的现实世界底层每件商品的成本。”

问题 7 — 多项式恒等式

- 展开： $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$ 。✓ 这是恒等式。
- 对于 x 的所有实数值（甚至复数值）都是如此。
- 使用 $x = 3$: $27 - 1 = 26$ ，因式分解为 $(3 - 1)(9 + 3 + 1) = 2 \cdot 13 = 26$ 。✓
- ★诊断要点：学生是否理解，“恒等式”表示“对所有 x 都成立”，而“方程”只在具体 x 强生辨别。

问题 8 — 几何和

- $a = 1, r = 3, n = 7$.
- $S = (1 - 3^7)/(1 - 3) = (1 - 2187)/(-2) = (-2186)/(-2) = 1093$.
- 验证： $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1093$ 。✓
- ★能力强的学生注意到结构： $3^7 = 2187$ ，所以 $S = (3^7 - 1)/2$ 。这种模式贯穿始终代数 2 并连接到单元 1。

问题 9 — 交叉乘法审查

- Lin 设 $3 = 2x$ （将 $3/x = 2 \times x$ 两边相乘）。然后是 $x = 3/2 = 1.5$ 。检查： $3/1.5 = 2$ ✓。
- 所以她是正确的，但她的语言很混乱——“ $3 \cdot 1 = 2 \cdot x$ ”是波浪形的。清晰的设置：相乘 两边都是 x 。
- ★诊断结果：那些未经检查就说自己错了的学生正在与她进行模式匹配“叉乘意味着对角线相乘”。实力强的同学通过替换来验证。

问题 10 — 为什么会出现无关的解决方案

- ★打开-结束。强：“两边同时乘以包含 x 的表达式可以将相乘乘以 0 当 x 使该表达式为零时。乘以零会将任何方程变成 $0 = 0$ ，这是正确的但没有意义。因此，这些 x 值成为明显的解决方案，尽管它们并非如此。”
- 弱：“有时代数会增加额外的答案”——正确，但缺少机制。
- ★这个问题是单元 3 的整个概念回报。