

代数 2 · 单元 2 · 评估指南

多项式函数

家长或教师指南——观察要点

单元 2 围绕分解形式的结构构建 多项式 思维。大多数诊断错误隐藏在多重性中，将零与 x 截距与 y 截距混淆，以及在撤消平方时丢失 $\pm$ 的踪迹。

问题 1 — 识别多项式

- (a) 多项式，次数4，首项系数3。
- (b) 不是多项式 — $\sqrt{x}$ 是 $x^{1/2}$ ，一个非整数指数。
- (c) 多项式。度数3，领先系数1。
- (d) 不是多项式 — x^{-2} 具有负指数。
- 注意：有些学生认为 (c) 不是多项式，因为“它是因式分解形式”。形式不会改变它是多项式的事实，只是外观不同。

问题 2 — 因子形式 $\leftrightarrow$ 图

- 零： $x = -3$ （乘以1）、 $x = 1$ （乘以2）、 $x = 4$ （乘以1）。
- 度数4，扩展时的主系数1。
- 末端行为：两端均向上（度4，正主导系数）。
- 图表：在-3 和4 处与 x 轴交叉，在 $x = 1$ 处触摸并弹跳。
- y 截距： $p(0) = (3)(-1)^2(-4) = -12$ 。
- ★关键检查：能否画出 $x = 1$ 处接触横轴后折返的形状？若画成直线穿过，说明还没有将多样性应用于形状。

问题 3 — 多重行为

- 重数 1：穿过横轴（像直线一样）。
- 重数 2：接触横轴后折返（像抛物线一样，不穿过横轴）。
- 重数 3：穿过横轴且有拐点（像 S 形曲线，在零点附近更平缓）。
- ★强：提到 $(x-a)^2$ 始终 ≥ 0 ，因此 多项式 的符号在交叉时不会改变 $x = a$ ；因此是接触，而不是交叉。
- 弱：记住了规则，没有推理。

问题 4 — $2x^3$ 的两种方法 — $8x = 0$

- 因式分解： $2x(x^2 - 4) = 2x(x - 2)(x + 2) = 0$ ，得到 $x = 0, 2, -2$ 。
- 图象法：求 $y = 2x^3 - 8x$ 与 x 轴交点的横坐标，得到相同的三个值。
- 大多数学生会发现这里的因式分解速度更快，因为它是一个整齐的三次方。绘图速度较慢，但在因式分解困难时可以使用。
- ★一位优秀的学生指出：“当 多项式 不能很好地分解或者当我想要一个快速视觉健全检查。”

问题 5 — 多项式除法 + 余数定理

- (a) 商： $x^2 - 5x + 6$ 。余数：0。
- (b) 余数 0 $\Rightarrow (x - 1)$ 是一个因素。
- (c) $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 。零：1、2、3。

- 注意：试图错误地分解商 $x^2 - 5x + 6$ 的学生。其因子为 $(x - 2)(x - 3)$ 。
- ★诊断：他们是否看到 $p(x)$ 必须能被 $(x - 1)$ 整除，因为 $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ？这就是余数定理的作用。

问题 6 — 余数定理陈述

- 强：“如果 $p(2) = 0$ ，则 $(x - 2)$ 是 $p(x)$ 的一个因子。”——这就是因式分解定理。
- 更好：连接到余数定理： $p(x)$ 除以 $(x - 2)$ 得到的余数等于 $p(2) = 0$ 。
- 弱：“ $x = 2$ 是零”——正确，但不使用因子语言。

问题 7 — 从零 + 点构建多项式

- 因式分解形式： $p(x) = a(x + 2)(x - 3)^2$ 。
- 使用 $(0, 36)$ ： $36 = a(2)(-3)^2 = 18a$ ，因此 $a = 2$ 。
- 最终： $p(x) = 2(x + 2)(x - 3)^2$ 。
- ★“a”的插槽是诊断。许多学生正确地写出了因子，但忘记了需要拉伸常数来匹配点 $(0, 36)$ 。

问题 8 — Mai 丢失的根

- Mai 错了——她失去了否定词根。 $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ 。
- ★年度最常见的代数 2 错误，以及单位 4（平方根）的设置为 $x^2 = k$ ）。⇒两种解决方案
- 强：“两边取平方根得到 $\pm$ ，因为 3^2 和 $(-3)^2$ 都等于 9。”
- 弱：“她应该写 $\pm$ ”，但没有说明原因。

问题 9 — 不同的因子，不同的多项式

- $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$ 。 -1 和 2 处为零。
- $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ 。 1 和 -2 处为零。
- Diego 错了——因子中的不同符号给出了具有不同零的不同多项式。
- ★概念点：括号内的符号很重要。当 $x =$ 时，因子 $(x - a)$ 为零 $+a$ ，而不是 $x = -a$ 。

问题 10 — 结束行为反射

- ★打开-结束；寻找关键思想： $|x|$ 非常大，主导项占主导地位，因为更高权力的增长速度比权力的增长速度要快得多。
- 强：给出一个数值示例——对于 $p(x) = x^4 - 100x^2$ 、 $p(10) = 10000 - 10000 = 0$ ，但 $p(100) = 10^8 - 10^6 \approx 10^8$ 。 $-100x^2$ 可以忽略不计。
- 弱：陈述规则但不解释原因。

—结束—