

代数 2 · 单元 1 · 评估指南

序列和函数

家长或教师指南——观察要点

单元1通过序列重新引入函数。观察学生是否能够在递归形式和显式形式之间灵活地转换——这种灵活性不仅仅是计算的正确性，更是理解的诊断信号。

问题 1 — 分类 + d/r

- (a) 算术, $d=3$ 。 (b) 几何, $r=3$ 。 (c) 都不是 (平方数 — 差异越来越大)。 (d) 几何, $r=1/2$ 。

●★ 诊断为 (c)。一个学生称其为算术，因为“差异存在”
内化算术需要不断的差异。优秀的学生会注意到 3、5、7、9 之间的差异——它们本身就是一个算术序列。

- (e) 理解扎实：“检查相邻项的差是否恒定（等差），或相邻项的比是否恒定（等比）。” 理解薄弱：“只要增长就是等差。”

问题 2 — 递归 ↔ 显式

- (a) 3, 7, 11, 15, 19.
- (b) $f(n) = 3 + 4(n-1)$ 或等效的 $4n - 1$ 。观看经典的逐一播放：写 $f(n) = 3 + 4n$ 的学生从 7 开始序列，而不是 3。
- (c) $f(50) = 199$.
- (d) ★ 优秀：“显式让我直接跳转到术语 50；递归需要添加 49。” 这是有两种形式的全部意义。
 - 如果学生在这里选择“递归”更容易，那么他们还没有看到后续的权衡标记。

问题 3 — 几何序列

- (a) $g(1) = 16$ 、 $g(n) = (1/2) \cdot g(n-1)$ 对于 $n \geq 2$ 。
- (b) $g(n) = 16 \cdot (1/2)^{(n-1)}$ 。常见错误： $g(n) = 16 \cdot (1/2)^n$ ，这使得 8 在 $n=1$ 处减一。
- (c) $g(8) = 16 \cdot (1/2)^7 = 16/128 = 1/8$ 。
 - 如果他们在没有解释的情况下得到像 0.125 这样的小数，请要求他们将其写为分数 — 分数流利度是一个单元1 期望。

问题 4 — 建模图块

- (a) 图块 $(n) = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$ 。与问题 2 相同的差一问题。
- (b) ★ 设备的诊断。域应为正整数 ($n = 1, 2, 3, \dots$)。不是 $n = 0$ (没有问题中的步骤 0)。不是 $n = 1.5$ (你不能有半步)。
 - 弱答案：“所有实数”——他们将其视为连续函数。
- (c) 原则上该模式可以永远持续下去，但该模型是一个序列，因为输入仅限于整数（步数）。

问题 5 — Han 的错误

- 韩错了。该序列是几何序列（比率 2），而不是算术序列。
- 韩的误解：他认为“算术”只是意味着“遵循规则”。在数学中，它具体意味着恒定的差异。
- 强：“差异是 3、6、12——不是恒定的——但比都是 2。它是几何的。”

问题 6 — 林与迭戈

- 林: $f(1) = 5 + 3(1) = 8$ 。错误——应该是5。
- 迭戈: $f(1) = 2 + 3(1) = 5$ 。正确的! $f(n) = 2 + 3n$ 。
- 等效的正确形式: $f(n) = 5 + 3(n-1)$ 。
- ★林的错误是典型的一比一失误: 她在 $n=1$ 起步时没有换挡。看看学生如何解释一下——“她忘记了减去 1 来自 n ”很好; “她加错了”忽略了结构性问题。

问题 7 — 多重表示

- 表: 20.25、13.5、9、6、4。
- 递归: $h(1) = 20.25$ 、 $h(n) = (2/3) \cdot h(n-1)$ 。
- 显式: $h(n) = 20.25 \cdot (2/3)^{(n-1)}$ 。
- 观察: 他们是否将20.25 保留为 $81/4$ 以使代数更清晰, 还是保留为小数? 流利的学生经常改用分数, 因为 $(2/3)^k$ 保持精确。
- ★能力强的学生注意到 $20.25 = 81/4$ 和 $81 = 3^4$, 它给出了一个整洁的形式: $h(n) = 3^{(5-n)} / 4$ 。奖金信号。

问题 8 — 加倍节省 (几何序列之和)

- 术语: 1、2、4、8、16、32、64、128、256、512。
- 总额 = $2^{10} - 1 = 1023$ 美元。(公式为 $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{(n-1)} = 2^n - 1$ 。)
- ★优秀的学生从二进制中认识到加倍模式和“2 的幂减去 1”的技巧 - 计数的故事。
- (d) 30 天总计: $2^{30} - 1 \approx \$1.07$ 十亿美元。诊断方法是学生是否意识到他们的直觉会大错特错——指数增长违背了线性直觉。这是一个单位1的反射矩。

问题 9 — 算术增长与几何增长

- 无论起始值如何, 几何 (使用 $r > 1$) 最终总是会超过算术。
- 有力的例子: $f(n) = 100 + 5n$ 与 $g(n) = 2 \cdot 1.5^n$ 。在 $n=1$ 、 $f=105$ 和 $g=3$ 。以 $n \approx 25$, g 超越。
- ★他们需要掌握的事实是: “对于足够大的 n , 指数优于线性”——这是单位5。
- 弱: 给出一个没有交叉数值证据的例子。

问题 10 — 创建您自己的 (顺序适当)

- 强: “树枝上的叶子数量, 其中每一层都有双倍的叶子。” 域: 正整数 (水平)。
- 强: “每5 年进行一次人口普查。” 域: 离散时间点。
- 弱: “汽车随时间变化的速度”——这是连续的, 而不是序列。他们不掌握域限制的标志。
- ★理由必须提及离散输入。