

代数 1 · 单元 8 · 评估指南

二次方程

家长或教师指南——观察要点

单元 8 将代数 1 的所有内容带到了高潮：学生必须在方法（因式分解、平方根、完成平方、二次公式）之间灵活移动，并将每个代数解连接回图形。密切关注方法的选择、丢失解决方案陷阱（除以 x ）以及作为结构诊断的判别式。

问题 1 — 基于推理的解决方案

- (a) $x = \pm 7$ 。(b) $x - 3 = \pm 4$ ，因此 $x = 7$ 或 $x = -1$ 。(c) $x^2 = 25$, $x = \pm 5$ 。(d) $(x + 1)^2 = 25$, $x + 1 = \pm 5$ ，因此 $x = 4$ 或 $x = -6$ 。
- (e) ★关键课程： $x^2 = 49$ 表示 $x \cdot x = 49$ ； $+7$ 和 -7 都可以工作。只写 $x = 7$ 的同学忘记了平方会丢失符号信息。
- 注意：平方根方程的任何带有单个值的答案都是危险信号。

问题 2 — 因式分解 + 零积

- (a) $(x - 3)(x - 5) = 0$ 、 $x = 3$ 或 5 。
- (b) $x(x + 4) = 0$ 、 $x = 0$ 或 -4 。
- (c) $(x - 4)(x + 4) = 0$, $x = \pm 4$ 。
- (d) ★Han 失去了解决方案 $x = 0$ 。除以 x 假设为 $x \neq 0$ ；如果 $x = 0$ 实际上是一个解决方案，那么您已经把它扔掉了。正确的方法：将 x 分解为 $x(x - 4) = 0$ ，得到 $x = 0$ 或 $x = 4$ 。
- ★本单元的经典代数陷阱。

问题 3 — 完成 $x^2 + 6x - 7$ 上的平方

- $x^2 + 6x = 7$ 。相加 $(6/2)^2 = 9$: $x^2 + 6x + 9 = 16$ 。 $(x + 3)^2 = 16$ 。 $x + 3 = \pm 4$ 。 $x = 1$ 或 $x = -7$ 。
- 良好表现：清楚地把未知数单独留在等号一边，正确识别 $(b/2)^2$ ，并正确使用 $\pm$ 的求解步骤。
- 注意：忘记在等号另一边也加 9，或用 $b/2 + b/2$ 代替 $(b/2)^2$ 。

问题 4 — 以顶点形式重写

- $x^2 - 10x + 18 = (x^2 - 10x + 25) - 25 + 18 = (x - 5)^2 - 7$ 。
- 顶点形式： $(x - 5)^2 - 7$ 。顶点： $(5, -7)$ 。
- ★连接单元 7（顶点形式）与单元 8（完成正方形）：相同的过程，不同框架。

问题 5 — $2x^2$ 上的二次公式 - $5x + 1 = 0$

- $x = (5 \pm \sqrt{(25 - 8)})/4 = (5 \pm \sqrt{17})/4$ 。 $x \approx (5 + 4.12)/4 \approx 2.28$ 或 $x \approx (5 - 4.12)/4 \approx 0.22$ 。
- 注意：代入 b 时的正负号错误；计算 $b^2 - 4ac$ 时的错误；分母是 $2a$ ，不是只有 a 。

问题 6 — 判别预测

- (a) $36 - 20 = 16$ 。判别 $> 0 \rightarrow 2$ 实数解。
- (b) $16 - 16 = 0$ 。判别式 $= 0 \rightarrow$ 恰好是 1 实数解（双根）。
- (c) $1 - 4 = -3$ 。判别式 $< 0 \rightarrow$ 没有真正的解决方案。
- (d) 图形化：判别式 $> 0 \rightarrow$ 抛物线与 x 轴相交两次； $= 0 \rightarrow$ 触摸一次； $< 0 \rightarrow$ 永不交叉。

- ★判别式连接代数（根数）和几何（截距）——结构顶点。

问题 7 — 相同的方程，两种方法

- $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \rightarrow x = 1$ 或 5 。
- 二次公式： $x = (6 \pm \sqrt{36 - 20})/2 = (6 \pm 4)/2 = 5$ 或 1 。
- 强：两种方法给出相同的答案；理解它们是对等的，而不是竞争的。
- ★方法的灵活性是诊断的依据；速度往往在选择中很重要。

问题 8 — 哪种方法？

- (a) 平方根 ($x = \pm 9$)。最简单的情况。
- (b) 保理： $(x - 3)(x - 4) = 0$ ；整数零，简单。
- (c) 二次公式（或完成平方）：不因式分解整数。
- (d) 二次公式（判别式 $25 - 84 < 0$ ，无实数解）。
- ★熟练掌握代数-1的学生会根据方程结构选择方法；这是本单元的顶点技能。

问题 9 — 矩形花园

- (a) $w(w + 3) = 70 \rightarrow w^2 + 3w - 70 = 0$ 。
- (b) 因式分解： $(w + 10)(w - 7) = 0$ ，因此 $w = 7$ 或 $w = -10$ 。或者二次公式给出相同的结果。
- (c) $w = 7$ 英尺（长度 10 英尺）。拒绝 $w = -10$ ，因为宽度不能为负数。
- ★代数解的上下文过滤是建模诊断。

问题 10 — 球落地

- $-16t^2 + 48t + 4 = 0 \rightarrow$ 除以 4： $-4t^2 + 12t + 1 = 0$ ，或 $4t^2 - 12t - 1 = 0$ 。
- $t = (12 \pm \sqrt{144 + 16})/8 = (12 \pm \sqrt{160})/8 = (12 \pm 4\sqrt{10})/8 = (3 \pm \sqrt{10})/2$ 。
- $\sqrt{10} \approx 3.16$ ，因此 $t \approx (3 + 3.16)/2 \approx 3.08$ 秒。拒绝负根。
- 观察：学生可能计算正确，但忘记拒绝负时间。

问题 11 — 强制一种解决方案： $x^2 - 4x + c = 0$

- (a) 判别式 $b^2 - 4ac = 16 - 4c = 0 \rightarrow c = 4$ 。
- (b) 方程变为 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ，i.e., $(x - 2)^2 = 0$ ，因此 $x = 2$ 。
- ★判别式逆向工程测试深度理解。

问题 12 — 有理数和无理数的和/积

- (a) 总是有理数（加法下有理数的闭合）。
- (b) 可以是： $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ （有理数）； $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ （无理数）。
- (c) 总是无理。强：证明草图——假设有理，导出矛盾。
- (d) E.g., $x^2 - 2 = 0$ 有 $x = \pm\sqrt{2}$ （无理数）。
- ★数集的闭包性质——单位的概念高水位线。