

代数 1 · 单元 7 · 评估指南

二次函数简介

家长或教师指南——观察要点

单元 7 引入了第三个主要函数族（线性函数和指数函数之后）：二次函数。学生应该了解二次模式与线性函数和指数函数有何不同，以及每个形式（标准、因子、顶点）如何揭示图形的不同特征。注意理解方程形式和图形特征之间的联系。

问题 1 — 一阶/二阶差分

- (a) A：一阶差分为 3、3、3、3 — 常数 → 线性。B：第一个差异是 1、3、5、7 — 不是常数。
- (b) B：第二个差异是 2、2、2 — 常量。
- (c) 二阶差分恒定的数列是二次数列。（一阶差分恒定 = 线性；相邻项的比恒定 = 指数。）
- ★ 结构诊断 — 与 6 单元相同的方法，但向上一级。

问题 2 — 弹丸 $h(t) = -16t^2 + 32t + 5$

- (a) $h(0) = 5$ ：球从 5 英尺（平台高度）开始。
- (b) $h(1) = -16 + 32 + 5 = 21$ 。 $h(2) = -64 + 64 + 5 = 5$ 。球升起，然后落回。
- (c) $-16t^2 + 32t + 5 = 0$ 的二次公式： $t = (-32 \pm \sqrt{(1024 + 320)})/(-32) = (-32 \pm \sqrt{1344})/(-32)$ 。
 $\sqrt{1344} \approx 36.66$ 。正根： $t \approx 2.15$ 秒。
- (d) 顶点处的最大值： $t = -b/(2a) = -32/(-32) = 1$ 秒。 $h(1) = 21$ 英尺。
- (e) 域： $0 \leq t \leq 2.15$ （球从发射到撞击一直存在 ★）。建模素养。

问题 3 — 三种形式，相同的函数

- (a) 展开因式分解： $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ 。展开顶点： $(x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$ 。
- (b) 零： $x = 1$ 和 $x = 3$ 。
- (c) 顶点： $(2, -1)$ 。
- (d) 纵轴截距： $f(0) = 3$ 。
- (e) ★ 该单元的诊断：标准形式 → y-截距（常数项）。因式分解形式 → x-截距（零）。顶点形式 → 顶点（最大值或最小值）。优秀的学生能够清楚地表达这三点。

问题 4 — 图 $(x + 1)(x - 3)$

- (a) 零： $x = -1$ 和 $x = 3$ 。
- (b) 顶点 $x = (-1 + 3)/2 = 1$ 。
- (c) $g(1) = (2)(-2) = -4$ 。
- (d) $g(0) = (1)(-3) = -3$ 。
- 草图：向上抛物线，顶点 $(1, -4)$ ，经过 $(-1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 、 $(3, 0)$ 。
- 注意：忘记顶点 y 坐标（仅绘制 $(1, 0)$ ）。

问题 5 — a 如何影响 $f(x) = ax^2$

- 全部都有顶点 $(0, 0)$ 。
- (a) 标准抛物线。

- (b) 更窄（更陡）。
- (c) 更宽（更浅）。
- (d) 向下打开（顶点现在是最大值）。
- (e) ★控制向上与向下的符号。a 的大小控制陡度 — 大 $|a|$ → 狭窄；小 $|a|$ → 宽。

问题 6 — L 形状图案

- (a) 总计取决于仔细阅读：底座中的 $2n + 1$ + 侧面的 $n = 3n + 1$ 。线性。
- (b) 线性 $(3n + 1)$ ，非二次。能力强的学生通过检查一阶差异来确认。
- (c) 步骤 $10 = 31$ ；步骤 $100 = 301$ 。
- ★该问题检查学生是否能够识别出看起来几何的图案是什么时候实际上是线性的，而不是二次的。

问题 7 — 二次与指数

- $f(1) = 1, g(1) = 2, f(5) = 25, g(5) = 32, f(10) = 100, g(10) = 1024, f(20) = 400, g(20) \approx 1,048,576$ 。
- g 在 $x = 4$ 或 5 附近超越 f （并永远保持领先）。
- ★“最终呈指数级胜利”的见解——扩展单元 6's 的要点。

问题 8 — $g(x) = -2(x - 3)^2 + 4$

- (a) 顶点 $(3, 4)$ 。顶点形式 $(x - h)^2 + k \rightarrow$ 顶点为 (h, k) 。
- (b) 向下打开 $(a = -2 < 0)$ 。
- (c) 比 f 窄 $(|a| = 2 > 1)$ 。
- (d) 在 $y = 4$ 处有最大值。
- (e) 顺序：以 x^2 开头；右移 3（减去 内部）；通过 2 进行垂直拉伸；在 x 轴上反射；向上移动 4。
- ★这里的顺序很重要；优秀的学生能够清楚地表达水平优先或内部与外部。

问题 9 — 错误分析

- (a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ 。安德烈忘记了中期 ★。最常见的代数错误是 1。强同学用 $(x + 3)(x + 3)$ 分布来解释。
- (b) Lin 是错误的——顶点形式是 $(x - h)^2 + k$ ，所以 $f(x) = (x - 5)^2 + 2$ 有 $h = 5$ ，顶点 $(5, 2)$ 。“ $(x - 5)$ ”中的减号使 h 为正。林抓错了牌子。
- 两者都是诊断性的——两种不同类型的符号错误。

问题 10 — 农夫矩形（打开 建模）

- (a) 围栏的三边： $2x + y = 100$ ，因此 $y = 100 - 2x$ 。面积 $A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$ 。
- (b) $x = -b/(2a) = -100/(-4) = 25$ 时的最大值。最大面积 = $25 \cdot 50 = 1250$ 平方英尺
- (c) 域： $0 < x < 50$ 。
- (d) 顶点 $(25, 1250)$ 。向下的抛物线。
- ★建模顶点 — 学生必须设置优化、识别二次方程并找到最大。