

代数 1 · 单元 6 · 评估指南

指数函数简介

家长或教师指南——观察要点

第 6 单元介绍一种全新的函数：它的行为由输出的恒定比值（而非恒定差值）决定。观察学生能否区分两者、解释增长因子与增长率，并避免把指数增长当作线性增长（尤其是在复利问题中）。

问题 1 — P 线性与 Q 指数

- (a) P 每一步添加 3。Q 乘以 2。
- (b) $P(x) = 10 + 3x$ 。 $Q(x) = 10 \cdot 2^x$ 。
- (c) $P(10) = 40$ 。 $Q(10) = 10 \cdot 1024 = 10,240$ 。截然不同。
- (d) ★ 该单元的核心见解：Q 的变化率本身正在增长（它是一个常数）在不断增长的基础上乘数）。P 的变化率是固定的。最终，乘法增长总是超过加法增长。
- 注意：那些说“Q 从一开始就更陡”的学生没有抓住概念点。

问题 2 — 细菌倍增

- (a) $B(t) = 50 \cdot 2^t$ 。
- (b) $B(5) = 50 \cdot 32 = 1600$ 。
- (c) 求解 $50 \cdot 2^t > 10,000 \rightarrow 2^t > 200$ 。 $2^7 = 128$ 、 $2^8 = 256$ 。那么大约 8 小时。
- (d) 真正的细菌耗尽了食物、空间和氧气。指数模型无限增长——一个重要的警告 ★。
建模素养。

问题 3 — 药物腐烂

- (a) $D(t) = 80 \cdot (0.8)^t$ 。
- (b) 衰减因子 = 0.8。衰减率 = 20%（即 0.20）。理解扎实的学生能说明：率表示百分比变化，因子表示所乘的数。
- (c) $D(4) = 80 \cdot (0.8)^4 = 80 \cdot 0.4096 \approx 32.8$ mg。 $D(10) = 80 \cdot 0.1074 \approx 8.6$ mg。
- (d) 从数学上讲， $D(t)$ 接近 0，但从未达到 0（渐近线位于 0）。在现实生活中，最终稀释到实际上为零，但指数模型永远不会恰好达到 0。

问题 4 — $f(x) = 3 \cdot 2^x$

- (a) y 截距 = $f(0) = 3 \cdot 2^0 = 3$ 。系数 (3) 是这种形式函数的 y 截距。
- (b) $f(1) = 6$, $f(2) = 12$, $f(3) = 24$ 。
- (c) $f(-1) = 3 \cdot 1/2 = 1.5$ 。 $f(-2) = 3 \cdot 1/4 = 0.75$ 。负指数表示“相除由碱基”重复。
- (d) 图形：平滑向上弯曲；通过 (0, 3)、(1, 6)、(2, 12) 等。随着 x 减小，接近 0。
- ★ 负指数是单元 6 的里程碑——请注意写 $f(-1) = -6$ 的学生。

问题 5 — 将方程与描述相匹配

- (a) 指数衰减（以 $1/2 < 1$ 为底），y 截距 10，递减。
- (b) 指数增长（以 $3 > 1$ 为基础），y 截距 5，递增。
- (c) 指数衰减（基 $0.95 < 1$ ），y 截距 200，缓慢下降。
- (d) 常数函数 = 1（基本 1）。

问题 6 — 6% 的复利

- (a) 1 年: \$1060。年 3: $1000(1.06)^3 \approx \$1191.02$ 。
- (b) $A(t) = 1000(1.06)^t$ 。
- (c) 实际值: $1000(1.06)^{10} \approx \$1790.85$, 因此利息 $\approx \$790.85$ — 而不是 \$600。
- (d) ★复合的诊断。Han 每年在原始数据中添加 6% (简单利息)。
复利对不断增长的余额收取 6% 费用。韩错过了一个概念: “利息上的利息”。

问题 7 — 连续折扣

- (a) 总折扣不是 30%。20% 关闭后: 原 0.8。然后 10% 掉那个: $0.8 \times 0.9 = 0.72$ 。总折扣 = 28%, 而不是 30%。
- (b) 最终价格 = \$72。
- ★乘法与加法的区别——与复利相同的教训, 不同的设置。

问题 8 — 恒定比例侦探

- (a) $18/12 = 1.5$, $27/18 = 1.5$, $40.5/27 = 1.5$ 。
- (b) 恒定比率 → 具有增长因子 1.5 的指数函数。
- (c) $y = 8 \cdot (1.5)^x$ 。(验算: $y(1) = 12 \checkmark$ 。)
- ★结构辨别要点: 比值相同 = 指数关系。(比较: 差值相同 = 线性关系。)

问题 9 — 指数规则错误

- (a) Priya 是错误的。 5^x 表示 $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5$ (x 次), 而不是 $5 \cdot x$ 。计数片: $5^3 = 125$, 而不是 15。
- (b) Mai 错了。相同底座: 相加指数。 $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$, 而不是 2^{12} 。
- (c) 迭戈错了。电源一电: 相乘指数。 $(3^2)^4 = 3^8$ 。
- ★三个经典的指数规则错误。每一个都是误用; 明确解释正确的规则是目标。

问题 10 — \$1000/月 与 双倍便士

- (a) 场景 A: 30 天内 \$30,000。场景 B: 总计 = $2^{30} - 1$ 美分 $\approx \$10,737,418$ — 大得多。轻松加倍获胜。
- (b) 强: “指数增长开始缓慢, 但急剧加速; 即使很小的数量也会复合成巨大的数字。” 弱: 只选择 A, 因为 “\$1000/月听起来更多”。
- ★最难忘的指数增长教训; 检查是否有 “啊哈”。

—结束—