

代数 1 · 单元 5 · 评估指南

函数

家长或教师指南——观察要点

单元 5 是代数 1 的概念核心。学生从操作表达式过渡到将函数视为对象：使用符号、图形、域和逆。观察可以用 $f(x)$ 做代数的学生和了解 f 是什么的学生之间的区别。

问题 1 — 函数与否？

- (a) 函数——线性；每个 x 映射到一个 y 。
- (b) 不是函数— $x = y^2$ 表示 $y = \pm\sqrt{x}$ ；两个输出。
- (c) 函数— 垂直线测试通过。
- (d) 函数— 相同的输入给出相同的输出，这是允许的。
- (e) 不是函数— 相同的输入(2) 给出两个不同的输出（5 和 7）。
- ★(d) 与 (e) 是诊断 - 规则是“每个输入一个输出”，而不是“每个输入不同的输出”。

问题 2 — 评估 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

- (a) $f(0) = 1$. (b) $f(-2) = 8 + 6 + 1 = 15$.
- (c) $f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = 2(a^2 + 2a + 1) - 3a - 3 + 1 = 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 2 = 2a^2 + a$.
- (d) $f(x) = 1 \rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \rightarrow x = 0$ 或 $x = 3/2$ 。
- 常见错误：(c) 忘记完全平方二项式；(d) 除以 x 并失去解 $x = 0$ 。

问题 3 — 咖啡冷却图

- (a) $g(0) = 90^\circ\text{C}$ — 初始温度。
- (b) 减少— 咖啡变凉。
- (c) 咖啡温度接近 22°C 附近的室温。
- (d) 非线性— 冷却速率最初较快，但随着时间的推移而减慢（牛顿冷却定律）。能力强的学生可能会将此描述为“凹凸”减少。
- 寻找：图表的形状与实际情况之间的联系。

问题 4 — 平均变化率

- (a) $(16 - 4)/(3 - 1) = 12/2 = 6$.
- (b) $(64 - 16)/(7 - 3) = 48/4 = 12$.
- (c) 变化率不同 $\rightarrow f$ 不是线性函数。（这些值符合 $f(x) = 2^x$ ，但学生不需要识别这一点。）
- (d) 对于一次函数，每个间隔的平均变化率都相同（它等于斜率）。
- ★(c)/(d) 将变化率与函数类型联系起来——单元的概念桥梁。

问题 5 — 出租车成本函数

- (a) $C(m) = 3.50 + 2.25m$.
- (b) 域： $m \geq 0$ （不能驾驶负里程），并且可能有一些上限（城市规模有限）。坚强的学生说出了这两个界限。
- (c) 范围： $C \geq 3.50$ （每个人至少支付固定费用），最高可达某个最大值。

- (d) 是不同的函数：向上取整得到阶梯函数（分段常数），并不是线性的。理解扎实的学生会识别出其输出值是离散的。
- ★结合情境确定定义域和值域才是关键，不只是数学上能取哪些值，还要看什么才感觉。

问题 6 — 分段 $h(x)$

- (a) $h(-4) = 2(-4)+1 = -7$; $h(0) = 0^2 = 0$; $h(2) = 4$; $h(3) = 9$; $h(5) = 12 - 5 = 7$.
- (b) $x = 0$ 处：左极限（由 $2x+1$ 得到）为 1，右侧值为 0，所以不连续（跳跃了 1）。 $x = 3$ 处：左侧值为 9，右极限（由 $12 - x$ 得到）为 9，所以连续。
- (c) 定义域：全实数。范围：包括每个部分的值范围。
- ★ (b) 是诊断——测试接缝处的连续性是分段函数的技术核心。

问题 7 — 绝对值变换

- (a) g 从 f 向右移动 3 并向上移动 2。
- (b) f 顶点：(0, 0)。 g -顶点：(3, 2)。
- (c) 关键是区分符号外和符号内。外部的 +2 在计算 $|x - 3|$ 之后相加，所以改变输出（ y 方向）。内部的 -3 在取绝对值前运算，所以改变输入；图像向右而非向左平移，因为要让 $x - 3 = 0$ ，必须有 $x = 3$ ，这就是顶点。
- ★这种“内部与外部”规则可以推广到所有函数转换——这是对函数转换的一个关键理解代数 2 及以上。

问题 8 — $f(x) = 3x - 6$ 的逆

- (a) 交换并求解： $y = 3x - 6 \rightarrow x = 3y - 6 \rightarrow y = (x + 6)/3$ 。所以 $f^{-1}(x) = (x + 6)/3$ 。
- (b) $f^{-1}(5) = 11/3$ 。 $f(11/3) = 3(11/3) - 6 = 11 - 6 = 5$ 。✓
- (c) f 将美元转换为欧元； f^{-1} 将欧元转换回美元。逆操作会“撤销”转换。
- ★语境解释是真正理解的诊断。

问题 9 — Han 和 Diego 的主张

- (a) Han 的主张 $f(x + h) = f(x) + h$ 一般是错误的 — 仅对于与斜率 1（或常数 0）线性的 f 为真。柜台： $f(x) = x^2$ ； $f(2 + 1) = 9$ 、 $f(2) + 1 = 5$ 。
- (b) Diego 的表示法是标准的 — $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ 。这是两个函数的乘积的定义。永远真实。
- 观看：学生可能会在没有示例的情况下忽略两者；示例测试的纪律就是教训。

问题 10 — 抛物线顶点 (2, -1)

- (a) 在 $(-\infty, 2)$ 上递减；在 $(2, \infty)$ 上增加。
- (b) 最小值 -1，位于 $x = 2$ 。
- (c) 没有最大值，因为抛物线开口向上—— y 可以无限增长。
- 强：将“向上打开”与“有 min 但没有最大值”连接。

问题 11 — 绘制具有给定属性的函数

- 他们的草图应该：在 $x = 0$ 和 $x = 3$ 处与 x 轴交叉；位于 $(-\infty, 0)$ 和 $(3, \infty)$ 上的轴上方；在 $x = -1$ （周围）处有峰值；在 $x = 2$ （周围）畅游。
- ★这是相反的方向——从属性回到图表——最深入的测试学生构思一个函数。