

加速7·单位8·评估指南

勾股定理 和 无理数

家长或教师指南——观察要点

单元 8 通过 勾股定理 和 无理数 将几何、代数和数感联系在一起。深层思想：（1）倾斜正方形的面积通过平方根给出边长；（2）该定理通过平方将边长与斜边联系起来；（3）有些数字 ($\sqrt{2}$, π) 不能写成 分数 — 它们是无理数。这是代数1和几何的主要准备。

问题 1 — 边长为正方形的面积

- 面积 49 $\rightarrow$ 侧面7。面积 30 $\rightarrow$ 侧面 $\sqrt{30}$ （精确）。小数 ≈ 5.48 是可以接受的，但不精确。
- 强：将答案保留为 $\sqrt{30}$ — 认识到这是确切的值。
- 弱：写下5.5 并停止，没有意识到精确值和近似值之间的差异。

问题 2 — 绘制给定面积的正方形

- 面积16：4 $\times$ 4 轴对齐的正方形。
- 面积 5：倾斜正方形— 顶点如(0,0)、(2,1)、(1,3)、(-1,2)。边长 $\sqrt{5}$ 。
- 面积 25：5 $\times$ 5 轴对齐或与支腿3,4 倾斜（侧面 $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ ）。
- 倾斜的方块解锁毕达哥拉斯的视觉证据。

问题 3 — 找到缺失的一面

- (a) $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = 10$.
- (b) $a^2 + 25 = 169$, $a^2 = 144$, $a = 12$.
- (c) $c^2 = 1 + 1 = 2$, $c = \sqrt{2}$ （无理数）。
- (c) 引入了无理斜边——单位8 的一个关键概念。

问题 4 — 梯子问题

- $h^2 + 6^2 = 10^2 \rightarrow h^2 = 64 \rightarrow h = 8$ 脚。
- 强：绘制并标记三角形。将斜边标识为梯子（最长的边，与直角相对）。
- 常见错误：假设10 是一条腿。

问题 5 - 点之间的距离

- 水平腿：7-1 = 6。垂直腿：10-2 = 8。距离 = $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ 。
- 这是通过毕达哥拉斯引入的距离公式。实力强的同学在坐标平面上画出直角三角形。
- 弱：尝试直接减去坐标。

问题 6 — 3D 盒子对角线

- 底边第一条对角线： $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。然后框对角线： $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ cm.
- 毕达哥拉斯的两个应用——这是3D 扩展。
- 强：明确标识两个直角三角形。弱：看不出需要两个步骤。

问题 7 — 有理与无理

- (a) $\sqrt{16} = 4$ — 有理数（整数）。

- (b) $\sqrt{2}$ — 无理数（没有分数 与其相等；小数 是非重复、非终止）。
- (c) $0.333... = 1/3$ — 有理数。
- (d) π — 无理数。
- (e) $0.1010010001...$ — 无理数（非重复、无模式）。
- 诊断：无理数= 不能写成 a/b ，其中 a 、 b 是整数。等效：非终止非重复 小数。

问题 8 — 近似 $\sqrt{20}$

- $4^2 = 16$ 、 $5^2 = 25$ 。所以 $4 < \sqrt{20} < 5$ 。
- $4.4^2 = 19.36$ 、 $4.5^2 = 20.25$ 。所以 $4.4 < \sqrt{20} < 4.5$ 。
- 没有计算器！能力强的学生可以通过整数和十分之一的平方来缩小范围。

问题 9 — 毕达哥拉斯三元组

- 两者都是毕达哥拉斯三元组。 $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ 。 $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681 = 41^2$ 。
- 特殊之处：满足定理的整数边长。(3-4-5) 系列进行了概括。
- 毕达哥拉斯三元组将算术、几何和数论联系起来。

问题 10 — Han 的主张

- 韩错了。像 $\pi = 3.14159...$ 这样的无理数可以写成 小数 但不是有理数。
- 主要区别：有理数 具有终止或重复小数 扩展。无理数是非终止且非重复的。
- 强烈的反应给出了反例，如 π 或 $\sqrt{2}$ 。

问题 11 — 5-7-9 是直角三角形吗？

- 检查： $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ 。但是 $9^2 = 81$ 。由于 $74 \neq 81$ ，不是直角三角形。
- 能力强的学生认识到这是毕达哥拉斯的逆：如果 $a^2 + b^2 = c^2$ ，则三角形是正确的。
- 严格：应将 $a^2 + b^2$ 与 c^2 进行比较，其中 c 是最长的一边。

问题 12 — 为什么 $(\sqrt{2})^2 = 2$

- 根据定义： $\sqrt{2}$ 是平方为2 的（正）数。
- 视觉上：边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形具有面积2。
- 代数上： $(\sqrt{x})^2 = x$ 对于 $x \geq 0$ 。
- 强：引用定义。这是所有激进工作背后的结构性事实。

问题 13 — Mia 和相反的情况

- 米娅是对的，这个定理叫勾股定理的逆定理。
- 强：区分定理（右 $\rightarrow a^2+b^2=c^2$ ）与其逆定理（ $a^2+b^2=c^2 \rightarrow$ 右）。两者在这里都是正确的，但他们在逻辑上说的是不同的事情。
- 额外奖励：请注意，这是一个经典示例，其中命题及其逆命题均成立。