

加速7·单位6·评估指南

函数及体积

家长或教师指南——观察要点

单元 6 正式引入函数并将其应用于卷。最重要的想法是：函数将一个输出分配给每个输入。观察学生是否认识到线性函数是一种特殊、简单的函数，并且 体积 公式是 半径 的非线性函数。

问题 1 — 函数与否？

- (a) 不是一个函数——多个人有相同的生日。
- (b) 函数— 每个州只有一个首都。
- (c) 不是函数— 大多数正数 有两个平方根 (e.g., $9 \rightarrow 3$ 和 -3) 。
- 鉴别器：“一个输入，一个输出”。优秀的学生可以产生反例（相同的输入给出两个输出）。

问题 2 — Apple 函数

- (a) $f(n) = 0.75n$.
- (b) $f(8) = \$6.00$, 8 苹果的成本。
- (c) $f(n) = 6 \rightarrow n = 8$ 苹果。“多少个苹果的价格为 \$6?”
- 较好回答：区分求函数值 ($f(8)$) 与解方程 (求使 $f(n) = 6$ 的 n)。这需要不同的思考方法。

问题 3 — 线性与非线性

- (a) 线性: $y = 2x - 5$ 。
- (b) 非线性: $y = x^2$ (二次) 。
- (c) 非线性: y 将每一步(3, 6, 12, 24) 加倍; 增长率增加。指数模式。
- (d) 线性 (任何直线都是线性的) 。
- 关键见解：线性意味着恒定的变化率。能力强的学生检查表格中的差异；弱学生假设 y 增长意味着线性。

问题 4 — 距离与时间图

- 形状：线向上（稳定行走），水平段（休息），然后更陡的线向下（跑回起点）。
- 诊断：他们是否认识到返回意味着距离减小——图表向下倾斜？
- 强：标记轴 (x 上的时间, y 上的距离) 并使用不同的坡度进行步行与跑步。

问题 5 — 圆柱体体积

- (a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi(9)(5) = 45\pi \text{ m}^3$.
- (b) 加倍半径: $V = \pi(36)(5) = 180\pi$ 。因式分解 = 4 (因为 r 是平方) 。
- (c) 加倍高度: $V = \pi(9)(10) = 90\pi$ 。因式分解 = 2 (高度是线性的) 。
- 诊断：他们是否认识到加倍半径 四倍体积，而不是加倍？这是本单元中最重要的非线性缩放见解。

问题 6 — 圆锥体与圆柱体

- (a) 圆柱体: $V = \pi(16)(9) = 144\pi \text{ cm}^3$ 。
- (b) 锥体: $V = (1/3)\pi(16)(9) = 48\pi \text{ cm}^3$ 。

- (c) 比 = $1/3$ 。圆锥体公式具有 $(1/3)$ 因子，因为三个底面和高度相同的圆锥体填充一个圆柱体。
- 强：陈述 $1/3$ 关系为事实；即使是更优秀的学生也可以描述一个实际的理由。

问题 7 — 球体体积缩放

- (a) $V_1 = (4/3)\pi(125) = 500\pi/3 \text{ cm}^3$. $V_2 = (4/3)\pi(1000) = 4000\pi/3 \text{ cm}^3$.
- (b) 对 8 进行因式分解 ($V_2/V_1 = 8$)。由于半径加倍，体积按 $2^3 = 8$ 缩放。
- (c) 一般规则：半径乘以 k 体积乘以 k^3 。
- 这概括为所有 3 D 形状：按 k 线性缩放 $\rightarrow$ 体积 按 k^3 缩放。代数 1 准备就绪的关键理念。

问题 8 — 线性图与二次图

- $y = mx + b$ 是线性的，因为变量仅出现一次幂；变化率是恒定的。
- $A = \pi r^2$ 是非线性（二次）— A 的增长速度比 r 快； r 的变化率会增加。
- 强：明确地将“变量的程度”与图形的形状联系起来。

问题 9 — 立方倍增

- 2-cm 立方体： $V = 8 \text{ cm}^3$ 。4-cm 立方体： $V = 64 \text{ cm}^3$ 。
- 体积增加了因子 8 (2^3)，而不是因子 2。
- Sara 错了——每边加倍，体积就乘以 $2^3 = 8$ 。
- 这个问题是一个经典且关键的问题。很多同学认为翻倍=翻倍。如果没有这种洞察力，几何和科学中的缩放问题就会失败。

问题 10 — 纸张以两种方式卷起

- 体积不一定相同！考虑一张 8.5×11 的纸。卷起来后，若圆周长为 8.5： $r \approx 1.35$, $h = 11$. $V \approx 63.3$ 立方英寸。
- 滚动圆周长 11： $r \approx 1.75$, $h = 8.5$ 。 $V \approx 81.7$ 立方英寸。
- 相同的表面积（论文）但体积不同，因为 r^2 的增长速度快于 h 的收缩速度。
- 强：使用公式 $V = \pi r^2 h$ 并观察到 r 是平方的，但 h 是线性的。

问题 11 — 以稳定速率进行圆锥填充

- 不是线性的。水位上升时横截面积增大（圆锥变宽），所以相同体积的水使水位上升得更少。
- 图表：水位起初快速上升（狭窄部分），然后随着变宽而缓慢上升。
- 诊断：画直线 的学生没有将几何与函数行为联系起来。