

الجبرا 2 • یونٹ 5 • اسسمنٹ گائیڈ

قوت نمائی تفاعلات اور مساواتیں

والدین یا استاد کے لیے — کن باتوں پر غور کریں

یونٹ 5 ایکسپونینشل فنکشنز تیار کرتا ہے اور نامعلوم قوت نما کو تلاش کرنے کے لیے معکوس آپریشن کے طور پر لوگارتھمز متعارف کراتا ہے۔ سب سے گہری تشخیص یہ ہے کہ آیا طلباء $\log_b(x) = y$ اور کو مختلف کپڑوں میں ایک ہی تعلق کے طور پر $b^y = x$ دیکھتے ہیں۔

مسئلہ 1 - بیکنیریا کی افزائش

- (a) $P(t) = 200 \cdot 3^t$.
- (b) $P(5) = 200 \cdot 243 = 48,600$. $P(8) = 200 \cdot 6561 = 1,312,200$.
- (c) $P(0.5) = 200 \cdot \sqrt{3} \approx 346.4$. ★
تشخیصی: کیا وہ قبول کرتے ہیں کہ فنکشن اب بھی غیر کے لیے کام کرتا ہے
عد t ؟ پہلے انہوں نے سوچا ہوگا کہ غیر متعینہ تھا۔ $3^{0.5}$
• مضبوط: "کا جذر مربع ہے۔ $3^{(1/2)}$ کیونکہ اصول یہی کہتا ہے $3^{0.5} = \sqrt{3}$

مسئلہ 2 — سالانہ ↔ ماہانہ شرح

- (a) $V(t) = 1000 \cdot 1.08^t$.
- (b) $m = 1.08^{(1/12)} \approx 1.00643$. نمو (0.643% ≈ تو ماہانہ نمو).
- (c) ★
تشخیصی: جیسا نہیں ہے۔ کمپاؤنڈ نمو میں ذیلی لکیری ہے۔ $0.643\% \cdot 12 \approx 0.667\%$
شرح - آپ صرف تقسیم کریں نہیں کرتے ہیں۔
• مضبوط: "تقسیم کرنے سے نمو میں اضافہ ہوتا ہے؛ کفایتی نمو کئی گنا بڑھ جاتی ہے، لہذا ہمیں 12 ویں جڑ کی ضرورت ہے۔"

مسئلہ 3 — بغیر کیلکولیٹر کے لاگ

- $\log_2(32) = 5$. $\log_2(1) = 0$. $\log_2(1/8) = -3$.
- $\log_{10}(1000) = 3$. $\log_{10}(0.01) = -2$.
- $\log_3(81) = 4$. $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$.
- (d) ★
تعریف: $\log_b(x)$ وہ قوت نما ہے جسے آپ x حاصل کرنے کے لیے b پر لگاتے ہیں۔ ریاضی میں ماہر طلبہ اسے اس طرح سے جملہ کریں۔
• سب سے زیادہ تشخیصی: نہیں دیکھتے وہ پھنس جاتے ہیں۔ $\sqrt{5} = 5^{(1/2)}$ جو طلباء — $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$

مسئلہ 4 — ایکسپونینشل کو حل کرنا

- (a) $x = 6$ ($2^6 = 64$ (سے)).
- (b) $x = \log_3(20) = \log(20)/\log(3) \approx 2.727$.
- (c) $2^t = 20$, $t = \log_2(20) \approx 4.322$.
- (d) $2x + 1 = \log_{10}(500) \approx 2.699$; $x \approx 0.850$.
- ★
پیٹرن: دونوں اطراف کا $\log$ لیں، پھر لکیری حل کریں۔ وہ طلباء جو 'دیکھ' نہیں سکتے کہ کب متعارف کرایا جائے۔
ایک $\log$ یونٹ کے قلب میں پھنس گئے ہیں۔

مسئلہ 5 — e کے قریب پہنچنا

- $(n=100) \approx 2.7048$. $(n=1000) \approx 2.7169$. $(n=1,000,000) \approx 2.71828$.
- $\dots e \approx 2.71828$ کے قریب پہنچتا ہے۔
- (c) مضبوط: $(1 + r)^n$ ، e مسلسل مرکب ترقی کی حد ہے۔ جب ترقی ہر لمحہ ہو رہی ہو (صرف ہر دور میں نہیں)، ضرب e "نہیں۔"
- ★
یہ مسئلہ مجرد مرکب سازی اور مسلسل (قدرتی) ترقی کے درمیان پل ہے۔

مسئلہ 6 — نصف زندگی ماڈلنگ

- (a) $A(t) = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)}$.
- (b) $25 = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)} \Rightarrow (1/2)^{(t/12)} = 1/4 = (1/2)^2 \Rightarrow t/12 = 2 \Rightarrow t = 24$ سال
- (c) $10 = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)} \Rightarrow (1/2)^{(t/12)} = 0.1 \Rightarrow t/12 = \log_{0.5}(0.1) = \ln(0.1)/\ln(0.5) \approx 3.322 \Rightarrow t \approx 39.86$ سال
- ★ $A(t) = 100 \cdot 0.5^t$ ان کے لیے دیکھیں: کو آدھی زندگی سے پیمانہ کرنا بھول جاتے ہیں۔ (t) قائم کرنے والے طلباء

مسئلہ 7 — دو log بنیادیں۔

$$\log(4^x) = \log(7) : 1 \text{ طریقہ} \Rightarrow x \cdot \log(4) = \log(7) \Rightarrow x = \log(7)/\log(4) \approx 1.404.$$

$$\ln(4^x) = \ln(7) : 2 \text{ طریقہ} \Rightarrow x \cdot \ln(4) = \ln(7) \Rightarrow x = \ln(7)/\ln(4) \approx 1.404.$$

- ★ تشخیصی: ایک جیسا جواب کیونکہ تبدیلی کی بنیاد فارمولہ $(\log_a(N))/\log_a(M)$ ہے آپ کس بنیاد کا انتخاب کرتے ہیں اس سے آزاد (ایک تقسیم کے اندر)۔
- مضبوط: "لاگز قوت نما کو شمار کرنے کا صرف ایک طریقہ ہے؛ بنیاد سے قطع نظر متعلقہ سائز طے شدہ ہے۔"

مسئلہ 8 — ڈیپاگو کے log اصول کی خرابی۔

$$\log(10 \cdot 100) = \log(1000) = 3. \log(10) \cdot \log(100) = 1 \cdot 2 = 2 \text{ برابر نہیں۔}$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b) \text{ — درست اصول: لاگز ضرب کو جمع میں بدل دیتے ہیں۔}$$

- ★ الجبرا 2 میں سب سے عام log غلطی۔ ریاضی میں ماہر طلبہ دیکھیں کہ مصنوعات کے لیے اصول ہے۔ جمع، ضرب نہیں، کیونکہ جب بنیادیں ملتی ہیں تو لاگز قوت نما اور قوت نما جمع کریں ہوتے ہیں۔

مسئلہ 9 — ایکسپونینشل بمقابلہ کثیر رقمی نمو

- سچ۔ کوئی بھی قوت نمائی تفاعل سے بڑھ جاتا ہے، چاہے ڈگری کچھ بھی $p(x)$ بالآخر کسی بھی کثیر رقمی $b > 1$ کے ساتھ b^x ہو۔

- مثال: کی طرف سے $x = 100$ نے پکڑ لیا ہے۔ 2^x کی طرف سے $x = 60$ جیتتا ہے۔ x^{10} کے لیے x ۔ چھوٹے x^{10} بمقابلہ 2^x فلکیاتی لحاظ سے بڑا ہے۔ 2^x

- ★ ریاضی میں ماہر طلبہ بنیادی وجہ کی وضاحت کریں: ایکسپونینشل گروتھ کمپاؤنڈز، کثیر رقمی ترقی صرف پاور آف ان پٹ ہے۔ کافی x دینے پر کمپاؤنڈنگ ہمیشہ جیت جاتی ہے۔
- کمزور: بغیر مثال کے حقیقت بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 10 — حقیقی دنیا کے نوشتہ جات

- ★ کھولیں ختم ہوا؛ مضبوط جوابات لاگز کو بڑی ڈائنامک رینجز کو کمپریس کرنے سے جوڑتے ہیں:
- پی ایچ: ہائیڈروجن آئن ارتکاز کا log؛ 1 کی pH تبدیلی کا مطلب ہے فرق $10 \times$
- ریکٹر اسکیل: زلزلہ طول و عرض کا log؛ شدت شدت 5 سے زیادہ مضبوط ہے۔ 10×6
- ڈیسیبلز: آواز کی طاقت کا log تناسب۔
- ★ کلیدی بصیرت: نوشتہ جات انسانوں کو مقداروں کا انتظام کرنے دیتے ہیں جس کی شدت کے بہت سے آرڈرز پر محیط ہوتے ہیں۔ قابل انتظام پیمانہ