

الجبرا 2 • یونٹ 4 • اسسمنٹ گائیڈ

مختلط اعداد اور ناطق قوت نما

والدین یا استاد کے لیے — کن باتوں پر غور کریں

یونٹ 4 نمبر کے نظام کو دو سمتوں میں پھیلاتا ہے: ناطق قوت نما (حقیقت میں خلا کو پُر کرنا) اور پیچیدہ اعداد (حقیقت سے آگے بڑھنا)۔ تشخیصی غلطیوں کا جھرمٹ: مربع جڑوں پر $\pm$ کو بھولنا، کو حقیقی نمبر $\sqrt{-9}$ کو غلط طریقے سے ہینڈل کرنا، اور $i^2 = -1$ کے طور پر سمجھا جانا۔

مسئلہ 1 — ناطق قوت نما

- (a) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.
- (b) $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.
- (c) $25^{-1/2} = 1/\sqrt{25} = 1/5$.
- (d) ★ $a^{1/n}$ کا مطلب ہے وہ نمبر جو n بالکل وہی جو a دیتا ہے — ایک دیتا ہے n تک بڑھایا جاتا ہے، ایک دیتا ہے — بالکل وہی جو n کا مطلب ہے وہ نمبر جو $a^{1/n}$ قوت نما رولز فورس ($a^{(1/n))^n = a^1 = a$)۔
- ضعیف: بغیر استدلال کے صرف اصول بیان کرتا ہے۔

مسئلہ 2 — مربع بمقابلہ مربع جڑ

- (a) $x = \pm 7$ (دو حل)۔
- (b) $x = 49$ (ایک حل)۔
- (c) ★ تشخیصی مضبوط: "کونشن کے ذریعہ پرنسپل (غیر منفی) جذر مربع کو ظاہر کرتا ہے، لہذا $\sqrt{x}$ دونوں کی اجازت دیتا ہے۔ -7 اور $+7$ تک 49 دونوں مربع سے $x^2 = 49$ کے پاس صرف ایک حل ہے۔ لیکن $x = 7$ اگر طلباء کہتے ہیں کہ (a) کے پاس صرف مسئلہ 2/4 ہے، تو انہوں نے دوبارہ $\pm$ کھو دیا ہے - ایک بار بار چلنے والا یونٹ $x=7$

مسئلہ 3 — بیرونی حل کے ساتھ ریڈیکل مساوات

- $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ۔ مربع کاری: $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ یا $x = -1$ ۔
- $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1 = 3$ ✓ چیک کریں $x = 4$ ۔
- خارجی $x = -1$ ۔ $\sqrt{4} = 2$ ؛ لیکن $x - 1 = -2$ ؛ چیک کریں $x = -1$ ۔
- مضبوط: "اسکوائرنگ"۔ لہذا ہم حل چنتے ہیں $a = -b$ میں بدل دیتی ہے، جو کہ اس وقت بھی درست ہے جب $a^2 = b^2$ کو $a = b$ ★ جہاں دونوں اطراف میں متضاد علامات ہیں - وہ اصل کو پورا نہیں کرتے۔
- یہ وہی بنیادی وجہ ہے جو یونٹ 3 خارجی حل ہے۔

مسئلہ 4 — i کے اختیارات

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ، $i^4 = (i^2)^2 = 1$ ، $i^5 = i$ ، $i^6 = i^2 = -1$ ۔
- (b) مضبوط: "ایجاد کرتے ہیں۔ ایک بار جب میں موجود ہو جاتا ہوں، تمام دو درجی حل قابل حل ہوتے ہیں۔ i کا کوئی حقیقی حل نہیں ہے، لہذا ہم $x^2 = -1$ (c) $i^{50} = i^2 = -1$ تو $50 = 4 \cdot 12 + 2$ ۔
- ★ تشخیص یہ ہے کہ آیا انہیں احساس ہے کہ میرے پاس 4 سائیکل ہے: $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$

مسئلہ 5 — پیچیدہ ریاضی

- $z + w = 4 - 2i$ ، $z - w = 2 + 6i$ ۔
- $z \cdot w = (3+2i)(1-4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i - 8(-1) = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$ ۔
- $z^2 = (3+2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$ ۔
- ★ $Z \cdot W$ پر سب سے عام غلطی: لکھنا۔ پیچیدہ کا پورا نقطہ $-8 i^2 = -8$ کو بھولنا اور $i^2 = -1$ ضرب یہ ہے کہ i^2 علامات کو پلٹتا ہے۔

مسئلہ 6 — کے لیے دو طریقے $x^2 + 4x + 13 = 0$

$$x + 2)^2 + 9 = 0) \Rightarrow (x + 2)^2 = -9 \Rightarrow x + 2 = \pm 3i \Rightarrow x = -2 \pm 3i.$$

- دو درجی فارمولہ: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{(16 - 52)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(-36)}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$.
- دونوں طریقوں کو ایک ہی جواب دینا چاہیے۔ یہ کراس چیک ہے۔ ایک طالب علم جو مختلف ہو جاتا ہے۔
- جوابات میں ریاضی کی غلطیاں تلاش کرنی چاہئیں۔

مسئلہ 7 — امتیازی تجزیہ

- (a) $D = 36 - 36 = 0$. ایک حقیقی (بار بار) حل.
- (b) $D = 9 + 40 = 49 > 0$. دو حقیقی حل۔
- (c) $D = 4 - 20 = -16 < 0$. دو پیچیدہ حل۔
- مضبوط: "کوآڈریٹک فارمولے میں $D = 0 \pm$ ہمیں دو حقیقی قدریں ملتی ہیں، اگر $D > 0$ ہے؛ اگر $D < 0$ ہے، اگر $D < 0$ ہے، اگر "ہمیں ایک خیالی حصہ ملتا ہے — دو پیچیدہ کنجوگیٹ حل۔
- یہ یونٹ 4 یونٹ بیانیہ سے بالکل مربوط ہے۔

مسئلہ 8 — بان کا دعویٰ $\sqrt{-9}$

- بان متعدد سطحوں پر غلط ہے۔ پرنسپل کمپلیکس جذر (مربع) کے برابر ہے۔ i بالکل بھی حقیقی نمبر نہیں ہے۔ یہ $3\sqrt{-9}$ ہے۔
- یہاں تک کہ اگر ہم نے i کے بغیر $\sqrt{}$ کو منفی تک بڑھانے کی کوشش کی، تب بھی کنونشن اصلی (مثبت خیالی) جڑ دے گا: $3i, -3i$ ۔
- ریاضی میں ماہر طلبہ واضح کرتا ہے کہ علامت $\sqrt{}$ ایک مخصوص قدر کو ظاہر کرتا ہے، یہاں تک کہ منفی کے لیے بھی: $\sqrt{-9} = 3i$.

مسئلہ 9 — مائی کا کوئی حل نہیں ریڈیکل

- کوئی حل نہیں ہے۔ $x = 16 \Rightarrow x = -4 \neq -4$. چونکہ $\sqrt{x} = -4$ لیکن مساوات کہتا ہے $\sqrt{16} = 4$ ؛ کو تبدیل کرنا $x = 16$ ہمیشہ $0 \leq \sqrt{x}$ ہوتا ہے (کنونشن کے مطابق). $\sqrt{x}$ کے پاس کوئی حل نہیں ہے، کیونکہ $x = -4$.
- یہ اس کی صاف ترین مثال ہے کہ کس طرح اسکوائرنگ بیرونی حل متعارف کراتی ہے: اصل مساوات کے پاس کوئی حل نہیں ہے، لیکن اسکوائرنگ (پتلی ہوا سے ایک تیار کرتی دکھائی دیتی ہے۔ $x = 16$) اسے دوبارہ مسئلہ 3 اور یونٹ 3 بیرونی حل سے مربوط کریں۔

مسئلہ 10 — کنجوگیٹ پروڈکٹ

- $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$.
- ہمیشہ حقیقی، اور ہمیشہ غیر منفی۔
- (b) بہترین: "مختلط اعداد کی تقسیم کے لیے شمار کنندہ اور مخرج کو مخرج کے مرافق سے ضرب دیں۔ مخرج حقیقی ہو جاتا ہے، جیسا کہ معیاری صورت $a + bi$ کے لیے مطلوب ہے۔"
- یہ یونٹ کے 'ورکنگ بیکورڈ' اختیاری سیکشن میں جدید پیچیدہ ریاضی اور معاملات کے لیے بنیاد ہے۔