

ज्यामिति • इकाई 5 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

ठोस ज्यामिति

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 5 अधिकतर आयतन सूत्रों और स्केलिंग के बारे में है। प्रमुख वैचारिक छल्लों: कैवलियरी का सिद्धांत (तिरछे ठोस में समान आधार/ऊँचाई के साथ सही ठोस के समान आयतन होता है), और k/k वर्ग/ k घन स्केलिंग पैटर्न। सूत्रों बनाम वैचारिक अंतराल के साथ प्रक्रियात्मक त्रुटियों पर ध्यान दें।

समस्या 1 - घूर्णन के ठोस

- (ए) सिलेंडर (दायां गोलाकार सिलेंडर)।
- (b) लंब वृत्तीय शंकु।
- (c) क्षेत्र।
- यह एक 'स्थानिक दृश्य' जांच है। जो छात्र (ए) और (c) प्राप्त करते हैं लेकिन (b) नहीं प्राप्त करते हैं वे अक्सर गलत अक्ष की कल्पना करते हैं।

समस्या 2 - घन क्रॉस-सेक्शन

- (a) फलक के सर्वांगसम एक वर्ग।
- (b) एक नियमित षट्कोण। (घन के केंद्र के माध्यम से लंबे विकर्ण पर लंबवत टुकड़ा।)
- (c) हां - एक पंचकोणीय क्रॉस-सेक्शन संभव है (घन को इस प्रकार काटें कि समतल उसके चेहरों के 5 को काट दे)।
- गणित में दक्ष विद्यार्थी पंचकोणीय या षट्कोणीय क्रॉस-सेक्शन को स्केच करें। यह एक कठिन स्थानिक समस्या है; अधिकांश छात्र पंचकोणीय को 'नहीं' कहेंगे - लेकिन यह संभव है (स्लाइस एक कोने को क्लिप करता है)।

समस्या 3 - 3 द्वारा स्केल किया गया बॉक्स

- नए आयाम: $12 \times 18 \times 30$ ।
- मूल SA: $2(24 + 40 + 60) = 248$ वर्ग स्केल्ड SA = $248 \cdot 9 = 2232$ वर्ग अनुपात $9 = 3$ वर्ग।
- मूल V = 240 क्यूबिक। स्केल्ड V = $240 \cdot 27 = 6480$ क्यूबिक। अनुपात $27 = 3$ घनीकृत।
- क्यों: पृष्ठीय क्षेत्रफल, 2 D है (प्रत्येक रैखिक आयाम $\times 3$ है, इसलिए क्षेत्रफल $\times 3 \cdot 3 = 9$)। आयतन, 3 D ($\times 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$) है।
- कमजोर: सिर्फ नियम याद रहता है। सशक्त: इकाइयों (वर्ग इंच बनाम घन इंच) का उपयोग करके समझाता है।

समस्या 4 - समरूप बोतलें

- आयतन अनुपात 8 का अर्थ है $8 = 2$ का रैखिक अनुपात घनमूल।
- बड़ी बोतल की ऊँचाई = $12 \cdot 2 = 24$ cm।
- बड़ा लेबल क्षेत्रफल = $30 \cdot 2$ वर्ग = 120 cm वर्ग।
- निदान यह है कि क्या छात्र आयतन अनुपात से शुरू करते हैं और क्यूब रूट के माध्यम से रैखिक अनुपात तक पीछे की ओर काम करते हैं।

समस्या 5 - शंकु, बेलन, गोला

- (ए) सिलेंडर V = $\pi \cdot 25 \cdot 12 = 300\pi \approx 942.5$ cm क्यूबेड।
- (b) शंकु V = $(1/3) \cdot \pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \approx 314.2$ cm घन।
- (c) क्षेत्र V = $(4/3) \cdot \pi \cdot 125 = 500\pi/3 \approx 523.6$ cm घन।
- अनुपात शंकु: सिलेंडर = 1:3 शंकु सूत्र में $1/3$ के कारण।
- 'क्यों $1/3$ ' प्रश्न: यह कैवलियरी + तथ्य से आता है कि 3 सर्वांगसम त्रिकोणीय पिरामिड एक त्रिकोणीय प्रिज्म (इकाई की व्युत्पत्ति) बनाने के लिए एक साथ फिट होते हैं।

समस्या 6 - तिरछा सिलेंडर

- लंबवत ऊंचाई (12) का उपयोग करें, तिरछी ऊंचाई का नहीं। $V = \pi \cdot 16 \cdot 12 = 192 \pi \approx 603.2$.
- कैवलियरी का सिद्धांत कहता है कि आयतन केवल क्रॉस-सेक्शन क्षेत्रफल (प्रत्येक स्तर पर πr^2 वर्ग) और लंबवत ऊंचाई पर निर्भर करता है - तिरछा पर नहीं।
- सामान्य त्रुटि: छात्र 15 का उपयोग करते हैं क्योंकि यह 'सिलेंडर की ऊंचाई' है। निदान यह है कि क्या उन्हें तिरछी ऊंचाई का एहसास होता है।

समस्या 7 - कैवलियरी का सिद्धांत

- कथन: 'यदि दो ठोस पदार्थों की ऊंचाई समान है, और प्रत्येक स्तर पर क्रॉस-सेक्शन का क्षेत्रफल समान है, तो दोनों ठोसों का आयतन समान है।'
- अनुप्रयोग: समान लंबवत ऊंचाई पर सर्वांगसम गोलाकार आधारों वाले एक दाएं सिलेंडर और एक तिरछे सिलेंडर में हर स्तर पर समान गोलाकार क्रॉस-सेक्शन होते हैं। अतः आयतन बराबर हैं।
- कमज़ोर: 'कैवलियरी ने कहा कि मात्राएँ बराबर हैं' - सिद्धांत के बिना दोहराता है।
- सशक्त: 'प्रत्येक ऊंचाई पर समान क्षेत्रफल' व्यक्त करता है।

समस्या 8 - लोहे की गेंद का द्रव्यमान

- आयतन $= (4/3) \cdot \pi \cdot 216 = 288 \pi \approx 904.8 \text{ cm}^3$ क्यूबेड।
- द्रव्यमान $= 904.8 \cdot 7.87 \approx 7121 \text{ g} \approx 7.12 \text{ kg}$ ।
- ज्यामिति को घनत्व/भौतिकी से जोड़ता है। एक 'व्यावहारिक' समस्या।
- यूनिट भ्रम पर नज़र रखें: $\text{cm}^3 \times \text{g/cm}^3 = \text{g}$, kg नहीं।

समस्या 9 - आइसक्रीम कोन

- गोलार्ध $V = (1/2) \cdot (4/3) \cdot \pi \cdot 27 = 18 \pi \approx 56.5 \text{ cm}^3$ घन।
- शंकु $V = (1/3) \cdot \pi \cdot 9 \cdot 12 = 36 \pi \approx 113.1 \text{ cm}^3$ घन।
- शंकु गोलार्ध के दोगुने से भी अधिक क्षेत्रफल को धारण करता है - पर्याप्त जगह।
- मॉडलिंग सफलता मानदंड: स्पष्ट सेटअप, दोनों खंडों की सही गणना, समझदार तुलना।
- मजबूत छात्रों ने देखा कि ऊंचाई $4r$ के शंकु के लिए, शंकु समान त्रिज्या के गोलार्ध से ठीक दोगुना है।

समस्या 10 - आंद्रे का टैंक दावा

- गलत. सभी आयामों को दोगुना करने से आयतन $\times 2$ घन $= 8$ गुणा हो जाता है, 2 नहीं।
- इकाई का बड़ा विचार. जो छात्र इसे नहीं पकड़ पाता उसने k क्यूब्ड स्केलिंग को आत्मसात नहीं किया है।
- मजबूत: एक ठोस उदाहरण देता है ($1 \times 1 \times 1$ क्यूब बनाम $2 \times 2 \times 2$ क्यूब; 1 बनाम 8 क्यूबिक इकाइयाँ)।

समस्या 11 - दो शंकु, समान आयतन

- $V_A = (1/3) \cdot \pi \cdot 16 \cdot h_A$. $V_B = (1/3) \cdot \pi \cdot 4 \cdot h_B$.
- बराबर: $16 \cdot h_A = 4 \cdot h_B$, इसलिए $h_B = 4 \cdot h_A$. शंकु B (छोटा त्रिज्या) 4 गुना लंबा होना चाहिए।
- अंतर्ज्ञान: शंकु B संकरा है इसलिए क्षतिपूर्ति के लिए इसे लंबा होना चाहिए।
- गणित में दक्ष विद्यार्थी नोटिस: त्रिज्या को आधा करने के लिए आयतन को स्थिर रखने के लिए 4 गुना ऊंचाई की आवश्यकता होती है - त्रिज्या सूत्र में वर्ग में प्रवेश करता है।