

बीजगणित 2 • इकाई 5 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

घातांकीय फलन और समीकरण

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

यूनिट 5 घातीय फलनों को विकसित करता है और अज्ञात घातांक को खोजने के लिए व्युत्क्रम ऑपरेशन के रूप में लघुगणक का परिचय देता है। सबसे गहरा निदान यह है कि क्या छात्र अलग-अलग कपड़ों में $\log_b(x) = y$ और $b^y = x$ को समान संबंध के रूप में देखते हैं।

समस्या 1 - बैक्टीरिया की वृद्धि

- (a) $P(t) = 200 \cdot 3^t$.
- (b) $P(5) = 200 \cdot 243 = 48,600$. $P(8) = 200 \cdot 6561 = 1,312,200$.
- (c) $P(0.5) = 200 \cdot \sqrt{3} \approx 346.4$. ★ निदान: क्या वे स्वीकार करते हैं कि फ़ंक्शन अभी भी गैर के लिए काम करता है- पूर्णांक t ? पहले उन्होंने सोचा होगा कि $3^{0.5}$ अपरिभाषित है।
- मजबूत: " $3^{0.5} = \sqrt{3}$ क्योंकि नियम यही कहता है: $3^{(1/2)}$, 3 का वर्गमूल है।"

समस्या 2 — वार्षिक $\leftrightarrow$ मासिक दर

- (a) $V(t) = 1000 \cdot 1.08^t$.
- (b) $m = 1.08^{(1/12)} \approx 1.00643$ । तो मासिक वृद्धि $\approx 0.643\%$ ।
- (c) ★ निदान: $0.643\% \cdot 8/12 \approx 0.667\%$ के समान नहीं है। मैं यौगिक वृद्धि उपरेखीय होती है दर - आप सिर्फ भाग दें नहीं हैं।
- मजबूत: "विभाजन मानता है कि वृद्धि जुड़ती है; घातांकीय वृद्धि कई गुना बढ़ जाती है, इसलिए हमें 12 वें मूल की आवश्यकता है।"

समस्या 3 - कैलकुलेटर के बिना लॉग

- $\log_2(32) = 5$. $\log_2(1) = 0$. $\log_2(1/8) = -3$.
- $\log_{10}(1000) = 3$. $\log_{10}(0.01) = -2$.
- $\log_3(81) = 4$. $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$.
- (d) ★ परिभाषा: $\log_b(x)$ वह घातांक है जिसे आपने x प्राप्त करने के लिए b पर रखा है। मजबूत छात्र इसे इस तरह से व्यक्त करते हैं।
- अधिकांश निदान: $\log_5(\sqrt{5}) = 1/2$ - जो छात्र $\sqrt{5} = 5^{(1/2)}$ नहीं देखते हैं वे फंस जाते हैं।

समस्या 4 - घातांक को हल करना

- (ए) $x = 6$ ($2^6 = 64$ के बाद से)।
- (b) $x = \log_3(20) = \log(20)/\log(3) \approx 2.727$.
- (c) $2^t = 20$, $t = \log_2(20) \approx 4.322$.
- (d) $2x + 1 = \log_{10}(500) \approx 2.699$; $x \approx 0.850$.
- ★ पैटर्न: दोनों पक्षों का $\log$ लें, फिर रैखिक रूप से हल करें। जो छात्र 'देख' नहीं पाते कि कब परिचय देना है एक $\log$ इकाई के केंद्र में अटका हुआ है।

समस्या 5 - e के निकट

- $(n=100) \approx 2.7048$. $(n=1000) \approx 2.7169$. $(n=1,000,000) \approx 2.71828$.
- दृष्टिकोण $e \approx 2.71828...$
- (c) सशक्त: "e निरंतर चक्रवृद्धि वृद्धि की सीमा है। जब वृद्धि हर पल (केवल हर अवधि में नहीं) हो रही है, तो गुणक e है, $(1 + r)^n$ नहीं।"
- ★ यह समस्या असतत संयोजन और निरंतर (प्राकृतिक) विकास के बीच का सेतु है।

समस्या 6 - अर्ध-जीवन मॉडलिंग

- (a) $A(t) = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)}$.
- (b) $25 = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)} \Rightarrow (1/2)^{(t/12)} = 1/4 = (1/2)^2 \Rightarrow t/12 = 2 \Rightarrow t = 24$ वर्ष.
- (c) $10 = 100 \cdot (1/2)^{(t/12)} \Rightarrow (1/2)^{(t/12)} = 0.1 \Rightarrow t/12 = \log_{0.5}(0.1) = \ln(0.1)/\ln(0.5) \approx 3.322 \Rightarrow t \approx 39.86$ साल.
- ★ इन पर नज़र रखें: वे छात्र जो $A(t) = 100 \cdot 0.5^t$ सेट करते हैं (t को आधे-आयु तक मापना भूल गए हैं)।

समस्या 7 - दो log आधार

- विधि 1: $\log(4^x) = \log(7) \Rightarrow x \cdot \log(4) = \log(7) \Rightarrow x = \log(7)/\log(4) \approx 1.404$.
- विधि 2: $\ln(4^x) = \ln(7) \Rightarrow x \cdot \ln(4) = \ln(7) \Rightarrow x = \ln(7)/\ln(4) \approx 1.404$.
- ★ निदान: परिवर्तन-के-आधार सूत्र के कारण समान उत्तर। $\log_a(N)/\log_a(M)$ है आप जो आधार चुनते हैं उससे स्वतंत्र (एकल भाग के भीतर)।
- मजबूत: "लॉग केवल घातांक को गिनने का एक तरीका है; सापेक्ष आकार आधार की परवाह किए बिना तय किया जाता है।"

समस्या 8 - डिएगो की log नियम त्रुटि

- गलत. परीक्षण: $\log(10 \cdot 100) = \log(1000) = 3$. $\log(10) \cdot \log(100) = 1 \cdot 2 = 2$. सम नहीं।
- सही नियम: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ - लॉग गुणन को जोड़ में बदल देते हैं।
- ★ बीजगणित में सबसे आम log त्रुटि 2। मजबूत छात्र देखते हैं कि उत्पादों के लिए नियम है जोड़, गुणन नहीं, क्योंकि आधार मेल खाने पर लॉग घातांक और घातांक जोड़ें होते हैं।

समस्या 9 - घातीय बनाम बहुपद वृद्धि

- सच. $b > 1$ के साथ कोई भी घातीय फलन b^x अंततः किसी भी बहुपद $p(x)$ से अधिक हो जाता है, चाहे डिग्री कुछ भी हो।
- उदाहरण: 2^x बनाम x^{10} । छोटे x के लिए, x^{10} जीतता है। $x \approx 60$ द्वारा, 2^x ने पकड़ बना ली है। $x = 100$ द्वारा, 2^x खगोलीय रूप से बड़ा है।
- ★ मजबूत छात्र अंतर्निहित कारण बताते हैं: घातीय वृद्धि यौगिक, बहुपद विकास केवल इनपुट की शक्ति है। पर्याप्त x दिए जाने पर कंपाउंडिंग हमेशा जीतती है।
- कमज़ोर: उदाहरण के बिना तथ्य बताता है।

समस्या 10 - वास्तविक दुनिया लॉग

- ★ खोलें-समाप्त; मजबूत उत्तर बड़ी गतिशील रेंजों को संपीड़ित करने के लिए लॉग कनेक्ट करते हैं:
- पीएच: हाइड्रोजन आयन सांद्रता का log; 1 के pH परिवर्तन का अर्थ है $10\times$ अंतर।
- रिक्टर स्केल: भूकंपीय आयाम का log; परिमाण 6, परिमाण 5 से $10\times$ अधिक मजबूत है।
- डेसिबल: ध्वनि शक्ति का log अनुपात।
- ★ मुख्य अंतर्दृष्टि: लॉग मनुष्यों को परिमाण के कई आदेशों तक फैली मात्राओं का प्रबंधन करने देते हैं प्रबंधनीय पैमाना।