

बीजगणित 2 · इकाई 4 · मूल्यांकन मार्गदर्शिका

जटिल संख्याएँ और परिमेय घातांक

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 4 संख्या प्रणाली को दो दिशाओं में फैलाती है: परिमेय घातांक (वास्तविकता में अंतराल भरना) और जटिल संख्या (वास्तविकता से परे विस्तार)। नैदानिक त्रुटियाँ चारों ओर जमा हो जाती हैं: वर्गमूल पर $\pm$ को भूल जाना, $i^2 = -1$ को गलत तरीके से संभालना, और $\sqrt{-9}$ को वास्तविक संख्या मानना।

समस्या 1 - परिमेय घातांक

- (a) $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.
- (b) $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.
- (c) $25^{-1/2} = 1/\sqrt{25} = 1/5$.
- (d) ★ अच्छी समझ: " $a^{1/n}$ वह संख्या है जिसे n घात तक उठाने पर a मिलता है; n -वाँ मूल यही होता है।" घातांक नियम बल $(a^{1/n})^n = a^1 = a$ ।
- कमजोर: बिना तर्क के केवल नियम बता देता है।

समस्या 2 - वर्ग बनाम वर्गमूल

- (ए) $x = \pm 7$ (दो समाधान)।
- (ब) $x = 49$ (एक समाधान)।
- (c) ★ निदान. सशक्त: " $\sqrt{x}$ परंपरा के अनुसार प्रिंसिपल (गैर-नकारात्मक) वर्गमूल को दर्शाता है, इसलिए $\sqrt{x} = 7$ का केवल एक ही समाधान है। लेकिन $x^2 = 49 + 7$ और -7 दोनों की अनुमति देता है क्योंकि दोनों वर्ग 49 तक हैं।"
- यदि छात्र कहते हैं कि (ए) में केवल $x=7$ है, तो उन्होंने $\pm$ फिर से खो दिया है - एक आवर्ती इकाई $2/4$ मुद्दा।

समस्या 3 - बाहरी समाधान के साथ रैडिकल समीकरण

- वर्ग करना: $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ या $x = -1$ ।
- $x = 4$ जाँचें: $\sqrt{9} = 3 = 4 - 1 = 3$ । ✓
- $x = -1$ जाँचें: $\sqrt{4} = 2$; लेकिन $x - 1 = -2$. तो $2 \neq -2$. बाह्य.
- ★ सशक्त: "वर्गीकरण ' $a = b$ ' को ' $a^2 = b^2$ ' में बदल देता है, जो तब भी सत्य है जब $a = -b$ होता है। इसलिए हम समाधान चुनते हैं जहाँ दोनों पक्षों के विपरीत चिह्न हैं - वे मूल को संतुष्ट नहीं करते हैं।"
- यह यूनिट 3 बाहरी समाधान के समान मूल कारण है।

समस्या 4 - i की शक्तियाँ

- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$. $i^4 = (i^2)^2 = 1$. $i^5 = i$. $i^6 = i^2 = -1$.
- (b) सशक्त: " $x^2 = -1$ का कोई वास्तविक समाधान नहीं है, इसलिए हम i का आविष्कार करते हैं। एक बार i अस्तित्व में आने पर, सभी द्विघात हल करने योग्य होते हैं।"
- (c) i^{50} : $50 = 4 \cdot 12 + 2$, इसलिए $i^{50} = i^2 = -1$.
- ★ निदान यह है कि क्या उन्हें एहसास है कि मेरे पास 4-चक्र है: $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$

समस्या 5 - जटिल अंकगणित

- $z + w = 4 - 2i$. $z - w = 2 + 6i$.
- $z \cdot w = (3+2i)(1-4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i - 8(-1) = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$.
- $z^2 = (3+2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$.
- ★ $z \cdot w$ पर सबसे आम त्रुटि: $i^2 = -1$ को भूल जाना और $-8 i^2 = -8$ लिखना। जटिल का पूरा बिंदु गुणन यह है कि i^2 संकेत फ्लिप करता है।

समस्या 6 - $x^2 + 4x + 13 = 0$ के लिए दो विधियाँ

- वर्ग पूरा करें: $(x + 2)^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = -9 \Rightarrow x + 2 = \pm 3i \Rightarrow x = -2 \pm 3i$.
- द्विघात सूत्र: $x = (-4 \pm \sqrt{(16 - 52)})/2 = (-4 \pm \sqrt{(-36)})/2 = (-4 \pm 6i)/2 = -2 \pm 3i$ ।
- ★दोनों विधियों को एक ही उत्तर देना होगा; वह क्रॉस-चेक है। एक छात्र जो अलग हो जाता है उत्तरों में अंकगणितीय त्रुटियाँ दिखनी चाहिए।

समस्या 7 - विभेदक विश्लेषण

- (ए) $D = 36 - 36 = 0$. एक वास्तविक (दोहराया गया) समाधान: $x = 3$ ।
- (b) $D = 9 + 40 = 49 > 0$ । दो वास्तविक समाधान.
- (c) $D = 4 - 20 = -16 < 0$ । दो जटिल समाधान.
- (d) ★सशक्त: "द्विघात सूत्र में $\sqrt{(D)}$ है; यदि $D > 0$ है तो हमें दो वास्तविक मान मिलते हैं, यदि $D = 0$ है तो $\pm$ एक में ढह जाता है, यदि $D < 0$ हमें एक काल्पनिक भाग मिलता है - दो जटिल संयुग्म समाधान।"
- यह यूनिट 4 यूनिट कथा से पूरी तरह से जुड़ता है।

समस्या 8 - हान का $\sqrt{(-9)}$ दावा

- हान कई स्तरों पर गलत है। $\sqrt{(-9)}$ बिल्कुल भी वास्तविक संख्या नहीं है; यह $3i$ (प्रमुख कॉम्प्लेक्स वर्गमूल) के बराबर है।
- भले ही हमने $\sqrt{}$ को i के बिना नकारात्मक तक विस्तारित करने का प्रयास किया हो, सम्मेलन अभी भी प्रिंसिपल (सकारात्मक काल्पनिक) रूट देगा: $3i, -3i$ नहीं।
- ★मजबूत छात्र स्पष्ट करते हैं कि प्रतीक $\sqrt{}$ एक विशिष्ट मान को दर्शाता है, यहां तक कि नकारात्मक के लिए भी: $\sqrt{(-9)} = 3i$.

समस्या 9 - माई का नो-सोल्यूशन रेडिकल

- $x = 16$ को प्रतिस्थापित करते हुए: $\sqrt{16} = 4$, लेकिन समीकरण $\sqrt{x} = -4$ कहता है। चूँकि $4 \neq -4$, $x = 16$ कोई समाधान नहीं है।
- $\sqrt{x} = -4$ का कोई समाधान नहीं है, क्योंकि $\sqrt{x}$ हमेशा ≥ 0 (सम्मेलन के अनुसार) होता है।
- ★यह इस बात का सबसे साफ़-सुथरा संभव उदाहरण है कि किस प्रकार वर्ग करने से बाहरी समाधान प्रस्तुत होते हैं: मूल समीकरण के पास कोई समाधान नहीं है, लेकिन स्क्वेरिंग ($x = 16$) पतली हवा से एक समाधान बनाता प्रतीत होता है।
- इसे वापस समस्या 3 और यूनिट 3 बाहरी समाधानों से कनेक्ट करें।

समस्या 10 - संयुग्मित उत्पाद

- $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$.
- ★हमेशा वास्तविक, और हमेशा गैर-नकारात्मक।
- (b) सशक्त: "भाग दें जटिल संख्याओं, गुणा करें अंश और हर को हर के संयुग्म द्वारा। हर वास्तविक हो जाता है, जो हम मानक रूप $a + bi$ के लिए चाहते हैं।"
- यह उन्नत जटिल अंकगणित के लिए आधारभूत कार्य है और इकाई के 'वर्किंग बैकवर्ड' वैकल्पिक अनुभाग में मायने रखता है।