

बीजगणित 2 • इकाई 3 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

परिमेय फलन और समीकरण

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 3 परिमेय अभिव्यक्तियों की संरचना के बारे में है। अधिकांश नैदानिक त्रुटियाँ एक ही स्थान पर छिपी रहती हैं: यह भूल जाते हैं कि x -मान जो हर को शून्य बनाते हैं, उन्हें डोमेन से बाहर रखा गया है। बाह्य समाधान केवल उस तथ्य की बीजगणितीय छाया हैं।

समस्या 1 - मूल परिमेय फ़ंक्शन $f(x) = (x+3)/(x-2)$

- डोमेन: $x = 2$ (हर शून्य) को छोड़कर सभी वास्तविक x ।
- लंबवत अनंतस्पर्शी: $x = 2$.
- क्षैतिज अनंतस्पर्शी: $y = 1$ (अंश और हर की डिग्री बराबर; अग्रणी गुणांकों का अनुपात = $1/1$).
- x -अंतःखंड: $x = -3$ (अंश शून्य)। y -अंतःखंड: $f(0) = 3/(-2) = -3/2$.
- ★(c) के लिए निदान यह है कि क्या वे नियम की व्याख्या करते हैं: समान डिग्री $\Rightarrow$ HA अग्रणी सहसंघों में से अनुपात है; अंश छोटा $\Rightarrow$ हा $y=0$ है; अंश बड़ा $\Rightarrow$ नहीं हा.

समस्या 2 - डिग्री तुलना द्वारा व्यवहार समाप्त करें

- (ए) HA: $y = 2$ (समान डिग्री; अग्रणी गुणांक $4/2$ का अनुपात)।
- (ब) HA: $y = 0$ (हर से अंश डिग्री कम)।
- (c) कोई क्षैतिज अनंतस्पर्शी नहीं - अंश डिग्री (3) > हर डिग्री (1)। एक तिरछा/बहुपद अनंतस्पर्शी है।
- ★यह क्लासिक यूनिट 3 नियम है। अधिकांश छात्रों को (ए) और (ब) मिलते हैं लेकिन (c) पर वे अलग हो जाते हैं। यदि वे कहते हैं 'हा है अनंत' या ' $y = x^2$ ' (वास्तविक तिरछी प्रवृत्ति), बाद वाले को स्पष्टीकरण के साथ स्वीकार करें।

समस्या 3 - छेद बनाम ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी

- $r(x) = (x-2)(x+2)/(x-2)$. $x \neq 2$ के लिए $r(x) = x + 2$ को सरल बनाता है।
- $x = 2$ पर एक छेद है, ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी नहीं - कारक रद्द हो जाता है।
- $r(3) = 5$. फ़ंक्शन $x = 2$ (सीमा) पर मान 4 'चाहता है' लेकिन वहां अपरिभाषित है।
- ★सबसे निदानात्मक प्रश्न. एक छात्र जो $x = 2$ की घोषणा करता है, वह बिना लंबवत अनंतस्पर्शी है बिना सोचे-समझे किसी नियम को लागू करना सरलीकरण है। मजबूत छात्र हमेशा कारक बनते हैं और पहले रद्द करते हैं।

समस्या 4 - $1/(x-3) = 5/(x+1)$

- क्रॉस-गुणा करें: $x + 1 = 5(x - 3) \Rightarrow x + 1 = 5x - 15 \Rightarrow 16 = 4x \Rightarrow x = 4$.
- जाँच करें: $1/(4-3) = 1$; $5/(4+1) = 1$. ✓
- ★ $x = 3$ और $x = -1$ दोनों को डोमेन से बाहर रखा जाना चाहिए। समाधान $x = 4$ डोमेन में है, इसलिए यह है वैध. मजबूत छात्र इस डोमेन-चेक को स्पष्ट रूप से व्यक्त करते हैं।

समस्या 5 - बाह्य समाधान

- गुणा करें दोनों तरफ $(x - 2)$: $x = 2 + (x - 2) \Rightarrow x = x$. सभी x के लिए सच है! लेकिन $x = 2$ को इससे बाहर रखा गया था डोमेन.
- वास्तविक समाधान सेट: $x = 2$ को छोड़कर सभी वास्तविक x ।
- वैकल्पिक रूप से यदि कोई छात्र संयोजन करता है और सीधे $x = 2$ प्राप्त करता है (e.g., घटाने पर $(x-2)/(x-2) = 0=0$ देता है), तो उन्हें यह पहचानना होगा कि $x=2$ बाहरी है।
- ★यह इकाई का सबसे गहरा बाह्य-समाधान क्षण है। पाठ: $(x - 2)$ से गुणा करने पर मिट जाता है वही प्रतिबंध जो समीकरण को $x = x$ से भिन्न बनाता है।

समस्या 6 - औसत लागत

- $A(n) = (5000 + 20n)/n = 5000/n + 20$.
- $A(100) = \$70/\text{आइटम}$ । $A(10,000) = \$20.50/\text{आइटम}$ ।
- जैसे $n \rightarrow \infty$, $A(n) \rightarrow \$20$. क्षैतिज अनंतस्पर्शी $y = 20$.
- संदर्भ में: जैसे-जैसे आप अधिक आइटम बनाते हैं, निश्चित लागत कम होती जाती है, लेकिन आप कभी भी औसत को $\$20$ की प्रति-आइटम लागत से नीचे नहीं धकेल सकते।
- ★मजबूत छात्र स्पष्ट रूप से अनंतस्पर्शी $y = 20$ को चर के " $\$20$ " की वास्तविक दुनिया के तल से जोड़ते हैं प्रति आइटम लागत।"

समस्या 7 - बहुपद पहचान

- विस्तार: $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$. ✓ पहचान।
- यह x के सभी वास्तविक मूल्यों (और यहां तक कि जटिल मूल्यों) के लिए सच है।
- $x = 3$ का उपयोग करना: $27 - 1 = 26$, $(3 - 1)(9 + 3 + 1) = 2 \cdot 13 = 26$ के रूप में फैक्टर किया गया। ✓
- ★निदान: क्या वे समझते हैं कि 'पहचान' का अर्थ 'सभी x के लिए सत्य' बनाम 'समीकरण' है जो कि लागू होता है विशिष्ट x ? मजबूत छात्र भेद करते हैं।

समस्या 8 - ज्यामितीय योग

- $a = 1$, $r = 3$, $n = 7$.
- $S = (1 - 3^7)/(1 - 3) = (1 - 2187)/(-2) = (-2186)/(-2) = 1093$.
- सत्यापन: $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1093$. ✓
- ★गणित में दक्ष विद्यार्थी संरचना पर ध्यान दें: $3^7 = 2187$, इसलिए $S = (3^7 - 1)/2$ । यह पैटर्न पूरे समय दोहराया जाता है बीजगणित 2 और इकाई 1 से जुड़ता है।

समस्या 9 - क्रॉस-गुणन जांच

- लिन ने $3 = 2x$ ($3/x = 2 \times x$ के दोनों पक्षों को गुणा करके) सेट किया। फिर $x = 3/2 = 1.5$. जांचें: $3/1.5 = 2$ ✓।
- तो वह सही है, लेकिन उसकी भाषा भ्रमित है - ' $3 \cdot 1 = 2 \cdot x$ ' हाथ से लहराने वाली है। स्पष्ट सेटअप: x द्वारा दोनों तरफ गुणा करें।
- ★निदान: जो छात्र कहते हैं कि वह बिना जाँच के गलत है, वे पैटर्न-मिलान के विरुद्ध हैं "क्रॉस-गुणा करें का अर्थ है गुणा करें विकर्ण"। मजबूत छात्र प्रतिस्थापन द्वारा सत्यापन करते हैं।

समस्या 10 - असंगत समाधान क्यों उत्पन्न होते हैं

- ★खोलें-समाप्त। सशक्त: " x वाले व्यंजक से दोनों पक्षों को गुणा करने पर गुणा करें को शून्य से गुणा किया जा सकता है जब x उस अभिव्यक्ति को शून्य बनाता है। शून्य से गुणा करने पर कोई भी समीकरण $0 = 0$ में बदल जाता है, जो सत्य है लेकिन अर्थहीन है। इसलिए वे x -मान स्पष्ट समाधान बन जाते हैं, भले ही वे नहीं हैं।"
- कमजोर: "कभी-कभी बीजगणित अतिरिक्त उत्तर जोड़ता है" - सच है लेकिन तंत्र गायब है।
- ★यह प्रश्न यूनिट 3 का संपूर्ण वैचारिक लाभ है।