

बीजगणित 1 • इकाई 5 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

फलन

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 5 बीजगणित 1 का वैचारिक हृदय है। छात्र अभिव्यक्ति में हेराफेरी करने से लेकर वस्तुओं के रूप में फलनों के बारे में सोचने की ओर संक्रमण करते हैं: नोटेशन, ग्राफ़, डोमेन और व्युत्क्रम के साथ। उन छात्रों के बीच अंतर देखें जो $f(x)$ के साथ बीजगणित कर सकते हैं और जो छात्र समझते हैं कि f क्या है।

समस्या 1 — यह फलन है या नहीं?

- (ए) फ़ंक्शन - रैखिक; प्रत्येक x एक y पर मैप करता है।
- (b) कोई फ़ंक्शन नहीं - $x = y^2$ का अर्थ है $y = \pm\sqrt{x}$; दो आउटपुट।
- (c) फ़ंक्शन - लंबवत-रेखा परीक्षण पास होता है।
- (d) फ़ंक्शन - समान इनपुट समान आउटपुट देता है, जिसकी अनुमति है।
- (e) कोई फ़ंक्शन नहीं - एक ही इनपुट (2) दो अलग-अलग आउटपुट (5 और 7) देता है।
- ★(d) बनाम (e) निदान है - नियम "प्रति इनपुट एक आउटपुट" है, न कि "प्रति इनपुट अलग-अलग आउटपुट।"

समस्या 2 — मूल्यांकन करें $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

- (a) $f(0) = 1$. (b) $f(-2) = 8 + 6 + 1 = 15$.
- (c) $f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = 2(a^2 + 2a + 1) - 3a - 3 + 1 = 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 2 = 2a^2 + a$.
- (d) $f(x) = 1 \rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \rightarrow x = 0$ या $x = 3/2$ ।
- सामान्य त्रुटियाँ: (c) द्विपद का पूर्णतः वर्ग करना भूल जाना; (d) को x से विभाजित करना और समाधान खोना $x = 0$.

समस्या 3 - कॉफ़ी कूलिंग ग्राफ़

- (ए) $g(0) = 90^\circ\text{C}$ - प्रारंभिक तापमान।
- (b) घटती हुई - कॉफ़ी ठंडी होती है।
- (c) कॉफ़ी कमरे के तापमान पर 22°C के करीब पहुंच जाती है।
- (d) रैखिक नहीं - शीतलन की दर प्रारंभ में तेज़ होती है और समय के साथ धीमी हो जाती है (न्यूटन का शीतलन का नियम)। गणित में दक्ष विद्यार्थी इसे 'अवतल-अप' घटने के रूप में वर्णित कर सकता है।
- खोजें: ग्राफ़ के आकार और भौतिक स्थिति के बीच संबंध।

समस्या 4 - परिवर्तन की औसत दर

- (a) $(16 - 4)/(3 - 1) = 12/2 = 6$.
- (b) $(64 - 16)/(7 - 3) = 48/4 = 12$.
- (c) अलग-अलग दरें $\rightarrow f$ रैखिक नहीं है। (ये मान $f(x) = 2^x$ से मेल खाते हैं, लेकिन विद्यार्थियों को इसे पहचानना आवश्यक नहीं है।)
- (d) रैखिक फलन के लिए, परिवर्तन की औसत दर प्रत्येक अंतराल पर समान होती है (यह ढलान के बराबर होती है)।
- ★(c)/(d) परिवर्तन की दर को फ़ंक्शन प्रकार से जोड़ता है - इकाई का वैचारिक पुल।

समस्या 5 - टैक्सी लागत फ़ंक्शन

- (a) $C(m) = 3.50 + 2.25m$.
- (b) डोमेन: $m \geq 0$ (नकारात्मक मील ड्राइव नहीं कर सकता), और संभवतः कुछ ऊपरी सीमा (शहर का आकार सीमित है)। गणित में दक्ष विद्यार्थी दोनों सीमाओं को नाम दें।
- (c) रेंज: $C \geq 3.50$ (हर कोई कम से कम प्लैट शुल्क का भुगतान करता है), कुछ अधिकतम तक।

- (d) अलग फलन — अगली पूर्ण संख्या तक बढ़ाना एक सीढ़ी फलन (खंडशः अचर) होगा, रैखिक फलन नहीं। दक्ष विद्यार्थी पहचानते हैं कि इसके निर्गत मान विविक्त हैं।
- ★ संदर्भ में डोमेन/रेंज निदान है - न केवल गणितीय संभावना बल्कि क्या बनाता है भावना।

समस्या 6 - टुकड़े-टुकड़े $h(x)$

- (a) $h(-4) = 2(-4)+1 = -7$; $h(0) = 0^2 = 0$; $h(2) = 4$; $h(3) = 9$; $h(5) = 12 - 5 = 7$.
- (b) $x = 0$ पर: बाईं सीमा ($2x+1$ से) 1 है, दायें मान 0 है — सतत नहीं (1 की छलाँग)। $x = 3$ पर: बायाँ मान 9 है, दाहिनी सीमा ($12 - x$ से) 9 है — सतत।
- (c) डोमेन: सभी वास्तविक संख्याएँ। रेंज: प्रत्येक टुकड़े से मूल्यों की एक श्रृंखला शामिल है।
- ★ (b) डायग्नोस्टिक है - सीमों पर निरंतरता का परीक्षण टुकड़े-टुकड़े फलनों का तकनीकी मूल है।

समस्या 7 - निरपेक्ष मूल्य परिवर्तन

- (ए) g को f से दाएं 3 और ऊपर 2 में स्थानांतरित कर दिया गया है।
- (b) f -वर्टेक्स: $(0, 0)$ । g -वर्टेक्स: $(3, 2)$ ।
- (c) बाहर और अंदर का अंतर मुख्य जाँच है। बाहर का $+2$, $|x - 3|$ निकालने के बाद जुड़ता है, इसलिए निर्गत (y -दिशा) बदलता है। अंदर का -3 निरपेक्ष मान से पहले आता है, इसलिए आगत बदलता है — और खिसकाव दाएँ होता है (बाएँ नहीं), क्योंकि $x - 3 = 0$ करने के लिए $x = 3$ चाहिए, जो शीर्ष है।
- ★ यह 'अंदर-बनाम-बाहर' नियम सभी फ्रंक्शन परिवर्तनों को सामान्यीकृत करता है - एक महत्वपूर्ण समझ बीजगणित 2 और उससे आगे।

समस्या 8 - $f(x) = 3x - 6$ का उलटा

- (ए) स्वैप करें और हल करें: $y = 3x - 6 \rightarrow x = 3y - 6 \rightarrow y = (x + 6)/3$ । तो f -व्युत्क्रम(x) = $(x + 6)/3$ ।
- (b) f -inverse(5) = $11/3$ । $f(11/3) = 3(11/3) - 6 = 11 - 6 = 5$. ✓
- (c) f \$ को € में परिवर्तित करता है; f -उलटा € को वापस \$ में परिवर्तित करता है। व्युत्क्रम रूपांतरण को 'पूर्ववत' कर देता है।
- ★ प्रासंगिक व्याख्या सच्ची समझ का निदान है।

समस्या 9 - हान और डिएगो के दावे

- (ए) हान का दावा $f(x + h) = f(x) + h$ आम तौर पर गलत है - केवल ढलान 1 (या निरंतर 0) के साथ f रैखिक के लिए सच है। काउंटर: $f(x) = x^2$; $f(2 + 1) = 9$, $f(2) + 1 = 5$ ।
- (b) डिएगो का अंकन मानक है - $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ । यह दो फलनों के उत्पाद की परिभाषा है। सदैव सत्य।
- देखें: छात्र बिना उदाहरण के दोनों को खारिज कर सकते हैं; उदाहरण-परीक्षण का अनुशासन पाठ है।

समस्या 10 - परवलय शीर्ष $(2, -1)$

- (ए) $(-\infty, 2)$ पर घट रहा है; $(2, \infty)$ पर बढ़ रहा है।
- (b) न्यूनतम मान -1 , $x = 2$ पर।
- (c) कोई अधिकतम नहीं क्योंकि परवलय ऊपर की ओर खुलता है - y बिना किसी सीमा के बढ़ सकता है।
- मजबूत: 'ऊपर की ओर खुलता है' को 'min' है लेकिन अधिकतम नहीं है' से जोड़ता है।

समस्या 11 - दिए गए गुणों के साथ एक फ्रंक्शन को स्केच करें

- उनका स्केच होना चाहिए: $x = 0$ और $x = 3$ पर x -अक्ष को पार करें; $(-\infty, 0)$ और $(3, \infty)$ पर अक्ष से ऊपर रहें; (लगभग) $x = -1$ पर एक शिखर है; (लगभग) $x = 2$ पर डुबकी लगाएं।
- ★ यह उलटी दिशा है — गुणों से वापस आलेख तक — इसकी सबसे गहरी जाँच कि छात्र एक समारोह की कल्पना करता है।