

त्वरित 7 • इकाई 8 • मूल्यांकन मार्गदर्शिका

पाइथागोरस प्रमेय और अपरिमेय संख्याएँ

अभिभावक या शिक्षक के लिए — क्या देखें

इकाई 8, पाइथागोरस प्रमेय और अपरिमेय संख्याओं के माध्यम से ज्यामिति, बीजगणित और संख्या बोध को एक साथ जोड़ती है। गहरे विचार: (1) एक झुके हुए वर्ग का क्षेत्रफल, वर्गमूल के माध्यम से भुजा की लंबाई देता है; (2) प्रमेय समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई को वर्गों के माध्यम से कर्ण से जोड़ता है; (3) कुछ संख्याएँ ($\sqrt{2}$, π) को भिन्न के रूप में नहीं लिखा जा सकता - वे अपरिमेय हैं। यह बीजगणित 1 और ज्यामिति के लिए एक प्रमुख तैयारी है।

समस्या 1 - किनारे पर वर्गाकार क्षेत्रफल

- क्षेत्रफल 49 $\rightarrow$ साइड 7। क्षेत्रफल 30 $\rightarrow$ साइड $\sqrt{30}$ (सटीक)। दशमलव संख्या ≈ 5.48 स्वीकार्य है लेकिन अचूक है।
- सशक्त: उत्तर को $\sqrt{30}$ के रूप में छोड़ता है - यह पहचानते हुए कि यह सटीक मान है।
- कमज़ोर: 5.5 लिखता है और रुक जाता है, सटीक और अनुमानित के बीच अंतर की सराहना नहीं करता।

समस्या 2 - दिए गए क्षेत्रफलों के साथ वर्ग बनाएं

- क्षेत्रफल 16: 4×4 अक्ष-संरेखित वर्ग।
- क्षेत्रफल 5: झुका हुआ वर्ग - $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(-1,2)$ जैसे शीर्ष। साइड की लंबाई $\sqrt{5}$ ।
- क्षेत्रफल 25: 5×5 अक्ष-संरेखित या पैरों के साथ झुका हुआ 3,4 (साइड $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$)।
- झुके हुए वर्ग पाइथागोरस के दृश्य प्रमाण को अनलॉक करते हैं।

समस्या 3 - लुप्त पक्ष ढूँढ़ें

- (a) $c^2 = 36 + 64 = 100$, $c = 10$.
- (b) $a^2 + 25 = 169$, $a^2 = 144$, $a = 12$.
- (c) $c^2 = 1 + 1 = 2$, $c = \sqrt{2}$ (अपरिमेय)।
- (c) अपरिमेय कर्ण का परिचय देता है - एक प्रमुख इकाई 8 विचार।

समस्या 4 - सीढ़ी समस्या

- $h^2 + 6^2 = 10^2 \rightarrow h^2 = 64 \rightarrow h = 8$ फीट।
- सशक्त: त्रिभुज बनाता है और उस पर लेबल लगाता है। कर्ण को सीढ़ी (सबसे लंबी भुजा, समकोण के विपरीत) के रूप में पहचानता है।
- सामान्य त्रुटि: मान लेना कि 10 एक पैर है।

समस्या 5 - बिंदुओं के बीच की दूरी

- क्षैतिज पैर: $7-1 = 6$. लंबवत पैर: $10-2 = 8$ । दूरी $= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.
- यह पाइथागोरस द्वारा प्रस्तुत किया गया दूरी सूत्र है। मजबूत छात्र निर्देशांक तल पर समकोण त्रिभुज बनाते हैं।
- कमज़ोर: सीधे घटाएँ निर्देशांक करने का प्रयास करता है।

समस्या 6 - 3 D बॉक्स विकर्ण

- आधार का पहला विकर्ण: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. फिर बॉक्स का विकर्ण: $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ cm.
- पाइथागोरस के दो अनुप्रयोग - यह 3 D एक्सटेंशन है।
- सशक्त: स्पष्ट रूप से दो समकोण त्रिभुजों की पहचान करता है। कमज़ोर: नहीं लगता कि दो चरणों की आवश्यकता है।

समस्या 7 - परिमेय बनाम अपरिमेय

- (ए) $\sqrt{16} = 4$ - परिमेय (पूर्णांक)।

- (b) $\sqrt{2}$ - अपरिमेय (कोई भिन्न इसके बराबर नहीं है; दशमलव संख्या गैर-दोहराव, गैर-समाप्ति है)।
- (c) $0.333... = 1/3$ — परिमेय।
- (d) π - अपरिमेय।
- (e) $0.1010010001...$ - अपरिमेय (दोहराया न जाने वाला, कोई पैटर्न नहीं)।
- डायग्नोस्टिक: अपरिमेय = को a/b के रूप में नहीं लिखा जा सकता है जहां a, b पूर्णांक हैं। समतुल्य: नॉन-टर्मिनेटिंग नॉन-रिपीटिंग दशमलव संख्या।

समस्या 8 - अनुमानित $\sqrt{20}$

- $4^2 = 16, 5^2 = 25$ । तो $4 < \sqrt{20} < 5$.
- $4.4^2 = 19.36, 4.5^2 = 20.25$ । तो $4.4 < \sqrt{20} < 4.5$.
- बिना कैलकुलेटर के! मजबूत छात्र इसे कम करने के लिए वर्ग पूर्णांक और दसवें भाग का उपयोग करते हैं।

समस्या 9 - पाइथागोरियन त्रिगुण

- दोनों पाइथागोरस त्रिक हैं। $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. $9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681 = 41^2$.
- विशेष क्या है: प्रमेय को संतुष्ट करने वाली पूर्णांक भुजाओं की लंबाई। (3-4-5) परिवार सामान्यीकरण करता है।
- पाइथागोरस त्रिक अंकगणित, ज्यामिति और संख्या सिद्धांत को जोड़ते हैं।

समस्या 10 - हान का दावा

- हान गलत है। $\pi = 3.14159...$ जैसी अपरिमेय संख्याएँ दशमलव संख्याएँ के रूप में लिखी जा सकती हैं लेकिन परिमेय नहीं हैं।
- मुख्य अंतर: परिमेय संख्याएँ में समाप्ति या दोहराव वाले दशमलव संख्या विस्तार हैं। अपरिमेय गैर-समाप्ति और गैर-दोहराव हैं।
- मजबूत प्रतिक्रिया π या $\sqrt{2}$ जैसा प्रति उदाहरण देती है।

समस्या 11 - क्या 5-7-9 एक समकोण त्रिभुज है?

- जाँच करें: $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$ । लेकिन $9^2 = 81$. चूँकि $74 \neq 81$, समकोण त्रिभुज नहीं है।
- मजबूत छात्र पहचानते हैं कि यह पाइथागोरस का व्युत्क्रम है: यदि $a^2 + b^2 = c^2$, तो त्रिभुज सही है।
- सख्त: $a^2 + b^2$ की तुलना c^2 से करनी चाहिए जहां c सबसे लंबी भुजा है।

समस्या 12 — क्यों $(\sqrt{2})^2 = 2$

- परिभाषा के अनुसार: $\sqrt{2}$ वह (धनात्मक) संख्या है जिसका वर्ग 2 है।
- दृष्टिगत रूप से: $\sqrt{2}$ भुजा वाले एक वर्ग में क्षेत्रफल 2 है।
- बीजगणितीय रूप से: $(\sqrt{x})^2 \geq 0$ के लिए $2 = x$ ।
- सशक्त: परिभाषा का हवाला देता है। यह सभी क्रांतिकारी कार्यों के पीछे का संरचनात्मक तथ्य है।

समस्या 13 - मिया और इसके विपरीत

- Mia सही है। इसका तकनीकी नाम पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है।
- सशक्त: प्रमेय (दाएं $\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$) को इसके विपरीत ($a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow$ दाएं) से अलग करता है। यहां दोनों सच हैं, लेकिन तार्किक रूप से वे अलग-अलग बातें कहते हैं।
- बोनस: ध्यान दें कि यह एक उत्कृष्ट उदाहरण है जहां एक कथन और उसका विपरीत दोनों सत्य हैं।